

ESTUDIO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE CONTROL APLICADO A SISTEMAS ROBÓTICOS DE CORTE DE REBABA.

JORGE ALBERTO CASTELLANOS RIVILLAS
300338

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL

Director:
Víctor Hugo Grisales Palacio, Ph.D.
Profesor Dpto. Ing. Mecánica y Mecatrónica

Codirector:
Ricardo Emiro Ramírez Heredia, Ph.D.
Profesor Dpto. Ing. Mecánica y Mecatrónica

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D. C.
2014

Aprobada por la Facultad de Ingeniería, en
cumplimiento de los requisitos exigidos para
otorgar el título de:

**Maestría en Ingeniería —
Automatización Industrial**

Víctor Hugo Grisales Palacio, Ph.D.
Director de la Tesis

Ricardo Emiro Ramírez Heredia, Ph.D.
Codirector de la Tesis

Oscar Fernando Avilés, Ph.D.
Jurado

Jhon Alexander Cortés, Ph.D.
Jurado

Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D. C., Abril de 2014

RESUMEN

ESTUDIO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE CONTROL APLICADO A SISTEMAS ROBÓTICOS DE CORTE DE REBABA.

por

Jorge Alberto Castellanos Rivillas
Maestría en Ingeniería – Automatización Industrial

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ingeniería

Director: Víctor Hugo Grisales Palacio, Ph.D.

Este documento describe el proceso llevado a cabo para la realización del análisis comparativo entre las técnicas de control de impedancia y control híbrido (fuerza-posición) en el escenario de corte de rebaba en una silla plástica. Se desarrolló un análisis matemático y geométrico de la cinemática del robot obteniendo las ecuaciones que describen la posición espacial del mismo. Después de tener la descripción espacial del robot se estudia y analiza matemáticamente las ecuaciones de Euler-Lagrange las cuales describen el modelo dinámico del robot que se quiere controlar con las técnicas de control de impedancia y control híbrido. Para lograr el control se estudian y se parametrizan las leyes que rigen los controladores tales como el cumplimiento de la dinámica de interacción entre el robot y el ambiente; el seguimiento de la trayectoria y alcanzar una fuerza deseada. Para generar una adecuada parametrización de los controladores es necesario conocer la dinámica del ambiente la cual está asociada al corte de rebaba en sillas plásticas. Finalmente todos los modelos son simulados e implementados en el ambiente Simulink de MATLAB® y con los resultados de esta obtenidos se encuentran los índices de desempeño que son utilizados para realizar el análisis comparativo de las técnicas de control.

Palabras Claves: Robótica, Control Híbrido, control de Impedancia, Dinámica y Selección de robots

ABSTRACT

This document describes the process undertaken for the realization of a comparative analysis between the impedance control techniques and hybrid control (force-position) on stage cutting burr on a plastic chair. A geometric and mathematical analysis of the kinematics of the robot was developed to obtain the equations describing the spatial position of robot. After having the spatial description of the robot is studied and mathematically analyzes the Euler-Lagrange equations which describe the dynamic model of the robot to be controlled with the techniques of impedance control and hybrid control. To achieve control are studied and setup the laws governing controller such as compliance with the dynamics of interaction between the robot and the environment; follow the path and reach a desired force. To generate an appropriate parameterization of the controllers is necessary to know the dynamics of the environment which is associated with the cutting burr on plastic chairs. Finally, all the models are simulated and implemented in MATLAB Simulink environment and the results obtained from these performance indices which are used to perform a comparative analysis of control techniques.

Keywords: Robotic, Hybrid Control, Impedance Control, Dynamics, Robot selection

RECONOCIMIENTOS

El autor desea expresar su reconocimiento a:

- A los profesores Víctor Hugo Grisales y Ricardo Emiro Ramírez quienes con su paciencia y sabiduría supieron encaminarme en la obtención del resultado de este trabajo.
- A mis compañeros de laboratorio que con su compañía y colaboración hicieron de la elaboración de esta tesis algo más ameno.
- A esas personas especiales en mi vida que con su ayuda me aportaron en ese último paso para alcanzar el objetivo de este trabajo.

DEDICATORIA

A mi familia

Con su apoyo incondicional me brindaron la fuerza y la energía
necesaria para no desfallecer durante este largo proceso

Contenido

Contenido	viii
Lista de Tablas	x
Lista de Figuras	xi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación	1
1.2 Alcance	2
1.3 Estructura del documento	2
2 CINEMÁTICA DIRECTA, INVERSA Y DIFERENCIAL	5
2.1 Representación en posición y orientación	5
2.2 Cinemática Directa.	9
2.3 Cinemática Inversa.	13
2.4 Cinemática Diferencial.	14
3 CRITERIOS DE SELECCIÓN DE UN ROBOT INDUSTRIAL	21
3.1 Grados de libertad.	21
3.2 Espacio de trabajo.	23
3.3 Carga del robot	26
3.4 Repetitividad y Resolución	27
3.5 Sectores de aplicación para robots industriales	28
3.6 Caso de uso aplicado	31
4 ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL ROBOT SCARA	35
4.1 Desarrollo de la cinemática directa para el robot SCARA.	35
4.2 Desarrollo de la Cinemática Inversa para robot SCARA.	39
4.3 Desarrollo del Jacobiano para robot SCARA.	41
4.4 Estudio y desarrollo de la ecuación Euler-Lagrange (Ecuación de movimiento)	42
5 CONTROL DE FUERZA	51
5.1 Control de robots con dinámica inversa	51
5.2 Control de Impedancia	54
5.3 Control Híbrido (Fuerza - posición)	61

6	SIMULACIÓN EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RELSULTADOS PARA EL PROCESO DE CORTE DE REBABA	69
6.1	Creación de la trayectoria	69
6.2	Modelado de la fuerza de corte (Ambiente)	72
6.3	Simulación con Control de Impedancia	75
6.4	Simulación utilizando Control Híbrido	79
6.5	Análisis comparativo entre el control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición)	84
7	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	89
7.1	Conclusiones	89
7.2	Contribuciones	90
7.3	Trabajo Futuro	91
	Bibliografía	93

Lista de Tablas

2.1	Tabla de parámetros D-H	12
3.1	Criterios de entrada	33
3.2	Robots Industriales	33
3.3	Ponderación criterios de proceso corte	34
4.1	Parámetros D-H robot SCARA	37
4.2	Matriz de inercias eslabón 1	44
4.3	Matriz de inercias eslabón 2	44
4.4	Matriz de inercias eslabón 3	44
4.5	Matriz de inercias eslabón 4	45
4.6	Características dinámicas de los actuadores	47
6.1	Tiempos medios y varianza de simulación con control de impedancia e híbrido	85
6.2	Esfuerzo de control para controlador tipo impedancia	85
6.3	Esfuerzo de control para controlador tipo híbrido	86
6.4	Máxima señal de control por ejes para el control de impedancia e híbrido	86
6.5	Suavidad de la señal de fuerza en el eje x	87
6.6	Valores RMS de la primera deriva de la señal de fuerza para eje x	87
6.7	Valores ITAE para control híbrido y control de impedancia	88
6.8	Índices de desempeño para el control de impedancia y el control híbrido	88

Lista de Figuras

2.1	Representación en posición bidimensional y tridimensional de un punto	6
2.2	Punto en dos marcos de referencias $\{1\}$ y 2	6
2.3	Rotación y traslación	7
2.4	Robot planar 2 grados de libertad	10
2.5	Asignación de marcos por D-H	12
2.6	Solución cinemática inversa	14
2.7	Sistema de un grado de libertad	14
2.8	Sistema de 2 eslabones velocidades angulares y lineales	15
2.9	Movimiento del efector final debido a una articulación prismática [23]	18
2.10	Movimiento del efector final debido a una articulación de rotacional [23]	19
3.1	Cubo con 6 grados de libertad	22
3.2	Ejemplo de robots con tres grados de libertad	22
3.3	Robot articulado 6 grados de libertad [1]	23
3.4	Espacio de trabajo[16]	24
3.5	Espacio de trabajo Stewart Gough[21]	24
3.6	Ejemplos de espacios de trabajo [16]	25
3.7	Espacio de trabajo Motoman-MH6 [18]	25
3.8	Peso máximo permitido para una herramienta montada sobre brida de montaje en distintas posiciones (Centro de gravedad)[1]	27
3.9	Resolución y repetitividad.[4]	28
3.10	Herramienta de robot industrial para realizar soldadura de punto.[12]	29
3.11	Silla plástica con rebaba	31
3.12	Dimensiones del espaldar de la silla	32
3.13	Gripper con cuchilla de corte	33
4.1	Base del robot SCARA	36
4.2	Brazo 1 del Robot SCARA	36
4.3	Brazo 2 del Robot SCARA	36
4.4	Eslabón prismático	36
4.5	Elemento rotacional en el efector final del robot SCARA	37
4.6	Robot SCARA con marcos de referencia D-H y cotas	37
4.7	Robot SCARA desde vista superior	39
4.8	Modelo de barras robot SCARA vista superior	39
4.9	Perfil de entrada para la función dinámica en el toolbox y en la función (S).	48
4.10	Parámetros de simulación para corroborar dinámica	49
4.11	Resultado de la dinámica del robot SCARA Tesis Vs Toolbox.	49
5.1	Sensor de muñeca para robots industriales [23]	52
5.2	Diagrama de bloques dinámica Robot SCARA	53
5.3	Diagrama de bloques dinámica inversa robot SCARA	54
5.4	Diagrama de bloques dinámica y dinámica inversa de robot SCARA	54
5.5	Diagrama de control PD de posición con realimentación en posición y velocidad	55

5.6	Errores de posición en el espacio articular para $\omega_i = 0,5 \quad 1 \quad 10 \quad 100$	56
5.7	Robot SCARA realizando fuerza sobre plano x, y	58
5.8	Posiciones en el espacio articular de la punta del robot con una trayectoria constante	59
5.9	Fuerza ejercida por el robot sobre el plano en la dirección del eje z con $k_p = 1000 N/m$	60
5.10	(a) Posición y (b) fuerza del eje Z para un ambiente con $k_p = 10000 N/m$	60
5.11	Efector final en contacto con superficie plana	61
5.12	Esquema de control híbrido	62
5.13	Manipulador actuando sobre medio elástico de constante K	65
5.14	Ley de control de fuerza espacio articular	66
5.15	Fuerza en el eje z del efector final para una (a) $K = 1000 N/m$ y (b) $K = 10000 N/m$	67
5.16	Posición del efector final para una $K = 1000 N/m$ y $K = 10000 N/m$	68
5.17	Error de posición del efector final para $K = 1000 N/m$ y $K = 10000 N/m$	68
6.1	Medidas de las líneas de corte de rebaba en una silla plástica (mm)	70
6.2	Planeación de la trayectoria y medidas de una silla para efectos de corte (mm)	71
6.3	Perfil de posición para una silla (a) en el espacio de trabajo (b) en el espacio articular	72
6.4	Perfil de (a) velocidades y (b) aceleraciones para la trayectoria corte de rebaba	72
6.5	Sistema masa-resorte-amortiguador, estimulado por fuerza externa	73
6.6	Tipos de perfiles de rebaba.	74
6.7	Trayectoria de estudio de formada por asteriscos.	74
6.8	Perfil de fuerza obtenido del control de impedancia con rebaba (a) tipo paso, (b) tipo trapezoidal y (c) tipo triangular en el eje x .	76
6.9	Rebaba tipo paso	76
6.10	Perfil del error en posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) trapezoidal y (b) triangular.	77
6.11	Señal de control para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular.	78
6.12	Perfil de la fuerza en el espacio de trabajo para rebaba de tipo paso con control híbrido.	80
6.13	Perfil de la fuerza en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) trapezoidal y (b) triangular con control híbrido	81
6.14	Perfil del error de posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular con control híbrido.	82
6.15	Perfil del error de posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular con control híbrido en el eje x .	82
6.16	Perfil de la señal de control en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular con control híbrido en el eje x .	83
6.17	Configuración de parámetros en Simulink	84

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

En los últimos años un número creciente de empresas han demostrado interés en invertir en actividades científicas, tecnológicas y de innovación [6]. Esta innovación está enfocada en actividades I+D, Adquisición de maquinaria y equipo, tecnologías de la información y las telecomunicaciones, entre otros. Los dos primeros enfoques están relacionados con la demanda industrial de nuevas tecnologías para la modernización y mejora de la productividad, lo que se refleja en productos y servicios más competitivos y atractivos para los clientes. Estas innovaciones, en el caso general, están determinadas en una fuerte inversión en equipos de tecnología extranjera y por tal motivo de mano de obra calificada, lo que requiere de capacitación y entrenamiento al personal nacional. Dentro de esta expansión de la economía colombiana juegan un papel importante los sistemas robóticos. Estos dispositivos tienen la capacidad de realizar, de forma automatizada y multifuncional, tareas de tipo repetitivo que requieren de precisión, comúnmente realizadas por humanos.

Uno de los campos poco explorados en el uso de los manipuladores robóticos en Colombia es el de ejecución de tareas que requieren interacción con el ambiente. Entre dichas tareas se encuentran: ensamble de piezas, corte de materiales, taladrado y pulido. Estas actividades pueden ser realizadas por robots industriales, pero se requiere, aparte del control de posición usual, el uso de otras técnicas de control que garanticen el correcto funcionamiento de estos dispositivos. Un ejemplo de lo anterior es el diseño e implementación de una técnica de control de fuerza, la cual permite una interacción controlada entre el robot y el medio, con el objetivo que el robot, la herramienta o/y el producto fabricado no se vean afectados o destruidos.

Dentro de las técnicas de control relacionadas con la interacción entre el ambiente y el robot se encuentran el control híbrido (fuerza-posición) [11] y el control de impedancia [20]. Al identificar las técnicas de control que permitirían realizar las tareas antes mencionadas, surgen los interrogantes: ¿Cuál es el desempeño y parametrización de cada una de estas técnicas? y ¿Cuál obtiene la mejor calificación para el desarrollo de una tarea específica?

Para realizar un análisis comparativo entre las técnicas de control de impedancia e híbrido (fuerza-posición), se realizó la selección de un caso de estudio basado en un escenario específico para una problemática de la industria colombiana, como es el retiro de material sobrante o corte de rebaba. Este escenario fue utilizado como fuente de inspiración para la realización de este trabajo, ya que al realizar la búsqueda a nivel local de soluciones en este campo, no se encontró una muestra de trabajos representativa acerca del control de fuerzas en robots industriales.

Finalmente, Por medio del proyecto aprobado por Colciencias con nombre Estandarización de la línea de producción de sillas utilizadas en el transporte masivo de pasajeros ejecutado entre la Universidad de los Andes y Bioplast, se llegó a solicitar la colaboración del grupo de investigación en

Automática de la Universidad Nacional de Colombia (GAUNAL) al cual pertenezco. Este proyecto fue la principal causa para el estudio del estado del arte de la tesis.

1.2 Alcance

En la actualidad el uso de modelos matemáticos aplicados al mundo de la ingeniería es de gran utilidad, dado que a través de estos es posible predecir el comportamiento que un sistema experimentará en diferentes condiciones. Este tipo de aproximaciones permiten pronosticar comportamientos erráticos además de la implementación de las leyes de control para obtener el comportamiento deseado y una óptima interacción entre las variables como: el peso (Material de construcción del robot), velocidad de los actuadores, tiempos de respuesta, espacio de trabajo, energía requerida y planeación de trayectorias.

Con este trabajo se pretende generar una comparación entre las técnicas de control de impedancia y control híbrido (fuerza-posición) aplicadas en un robot SCARA de 4 grados de libertad para la tarea de corte de rebaba en sillas plásticas en un escenario de simulación computacional. Para caracterizar las técnicas y realizar un análisis comparativo del control de impedancia e híbrido para el corte de rebaba, se establece un modelo matemático de la dinámica del robot incluyendo las fuerzas de interacción con el ambiente, se parametrizan y determinan las características principales de las leyes de control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición). Finalmente se desarrollan algunas aplicaciones computacionales en Simulink de MATLAB® como la cinemática directa, cinemática inversa, el Jacobiano, la dinámica del robot, la dinámica inversa, el modelo del ambiente, el controlador de impedancia y el controlador híbrido (fuerza-posición).

Con los modelos implementados computacionalmente se tratará de crear una simulación con un escenario de rebaba variable en el tiempo, el cual permita encontrar diferentes tipos de características relacionadas con el desempeño de los controladores y así poderlas comparar.

1.3 Estructura del documento

La finalidad de este documento es describir el proceso realizado para seleccionar la técnica de control más adecuada para efectuar una tarea de corte de rebaba utilizando un manipulador robótico. Con el fin de establecer los criterios necesarios para la adecuada elección de un robot industrial, en el capítulo 2 se explica como la descripción espacial puede obtenerse utilizando herramientas matemáticas y se muestran los modelos cinemáticos que permiten representar la dinámica del robot.

Teniendo en cuenta los elementos que anteceden, el objetivo del capítulo 3 es encontrar un robot industrial que cumpla con las necesidades del proceso de corte de rebaba en una silla plástica. Para alcanzar este propósito se utilizan varios conceptos como son: grados de libertad, espacio de trabajo, carga del robot, repetitividad y resolución. En seguida, en los sectores de aplicación de los manipuladores robóticos, se desglosan elementos como: la manipulación de piezas, soldadura, ensamble, dosificación y asistencia a procesos.

Después de realizada la selección, en el capítulo 4 se pretende encontrar el modelo dinámico y cinemático del manipulador seleccionado, un robot SCARA HM-40704G. Para el modelo cinemático se encuentran los parámetros Denavit-Hartenberg y el método geométrico (secciones 4.1 y 4.2). Además, se obtiene el Jacobiano geométrico del robot, el cual permite realizar la transformación de la dinámica del espacio articular al espacio de trabajo (sección 4.3). Para hallar el modelo dinámico se utiliza el método de Euler-Lagrange, el cual se basa en el balance de la energía cinética y potencial (sección 4.4).

En el capítulo 5 se presentan las técnicas de control de impedancia e híbrido (fuerza-posición) basados en la dinámica inversa. Allí se caracterizan y otorgan parámetros a los controles basado en ejemplos prácticos. Además se demuestra el efecto que causa en el comportamiento del robot el desconocimiento de la dinámica del ambiente. Un análisis comparativo entre el control de impedancia y el control híbrido es evaluado en el escenario de corte de rebaba de una silla plástica para el transporte

urbano. En el capítulo 6 se utilizan varios índices de desempeño como son: Suavidad de la señal de fuerza, valor de la integral del error absoluto por el tiempo, el valor de la integral del valor absoluto de la señal de control multiplicado por el tiempo y el valor máximo de la señal de control. No se utilizan índices transitorios como tiempo de establecimiento ya que el control de impedancia es una técnica de control de fuerza indirecta que no podría compararse con el control híbrido que es una técnica de control directa. Éstos índices son comparados mediante el uso de tablas, con el fin de valorar el desempeño de los controladores.

Finalmente, en el capítulo 7, algunas conclusiones de la investigación y las contribuciones en la aplicación específica a la problemática de esta clase de industria son planteadas. De la misma manera posibles trabajos futuros a seguir para la continuidad de la investigación son propuestos.

Capítulo 2

CINEMÁTICA DIRECTA, INVERSA Y DIFERENCIAL

El propósito de este capítulo en el marco de la tesis es conocer la descripción espacial de un robot por medio de herramientas matemáticas con el fin de utilizar estos conceptos al elegir un robot industrial, además de desarrollar los modelos cinemáticos que posee un robot industrial. Como primera parte se presenta el sistema de posicionamiento y orientación de un marco de referencia ortonormal, los elementos como la traslación y rotación en los ejes x, y y z son estudiados hasta llegar a la representación por medio de la matriz de transformación homogénea. En la siguiente sección se describe la cinemática directa como herramienta de identificación del efector final por medio de las coordenadas articulares, para el logro de este objetivo se utilizan dos métodos como son el geométrico y el analítico. Con el método geométrico se realiza una descripción donde se utilizan funciones trigonométricas para encontrar una posición específica, con el método analítico se utiliza los parámetros Denavit- Hartenberg para encontrar la cinemática directa. En la tercera sección se desarrolla la cinemática inversa por medio del método geométrico y por último en la sección final se amplía el concepto de cinemática diferencial donde se analiza la velocidad del robot a través de la velocidad angular y la velocidad lineal, así como el análisis del Jacobiano a manera de elemento transformador de velocidades y los métodos de su obtención.

2.1 Representación en posición y orientación

Uno de los principales problemas en la robótica es determinar la posición y la orientación de los diferentes elementos que componen un robot, además de conocer la posición de los elementos a manipular y la posición de los obstáculos que existen en el ambiente. Para realizar esta tarea se utiliza un conjunto de herramientas matemáticas que permiten conocer un grupo de ecuaciones que relacionan las posiciones de los elementos del robot, las herramientas y objetos a manejar con un marco de referencia absoluto.

Para realizar una representación geométrica de un cuerpo se analiza por separado la posición y la rotación del mismo. Como primer elemento se toma un punto en el espacio, el cual está representado en un plano bidimensional como se observa en la figura 2.1(a). El marco de referencia es un sistema ortonormal donde su origen $\{0\}$ se encuentra en la intersección de los ejes coordenados x y y . El punto P es descrito respecto a un marco de referencia a través de un vector coordinado, este vector está compuesto por los elementos en cada uno de los ejes del marco de referencia (x, y) . El origen de este vector es el mismo origen del marco de referencia y el fin del vector es el punto P . Para realizar la representación del punto P en un espacio tridimensional se realiza el mismo análisis que en el espacio bidimensional pero se agrega un componente en el eje z como se observa en la figura 2.1(b), ahora el punto P estará representado por la tripla (x, y, z) .

Respecto a la orientación del punto P no es posible realizar un análisis teniendo en cuenta que

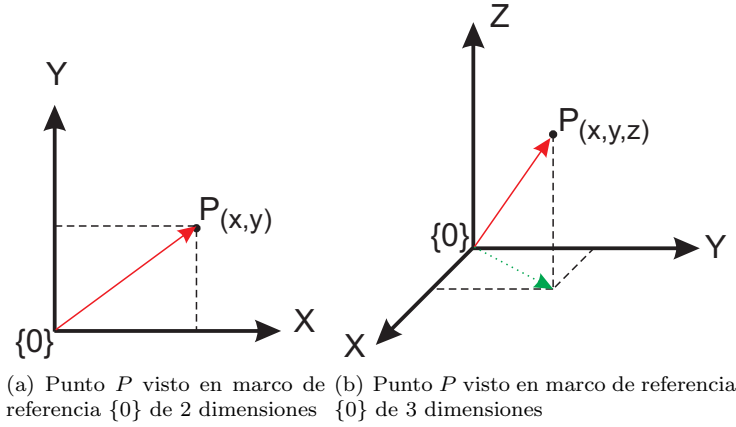


Figura 2.1: Representación en posición bidimensional y tridimensional de un punto

un punto no tiene caras definidas ni un volumen asociado. Es posible designar una orientación a un punto siempre y cuando a este se le adhiera un marco de referencia.

En la figura 2.2 se observa que el punto P está asociado a dos marcos de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$. Estos marcos de referencia asocian dos posibles posiciones relativas del punto P . Cada una de estas posiciones están relacionadas a los marcos de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$ respectivamente, también se nota que el marco de referencia $\{1\}$ se encuentra rotado y trasladado respecto al marco $\{0\}$. Para poder determinar la posición del punto P se hace necesario conocer al menos 2 de los 3 vectores de la figura 2.2, además de la rotación del marco de referencia $\{1\}$ respecto al marco $\{0\}$.

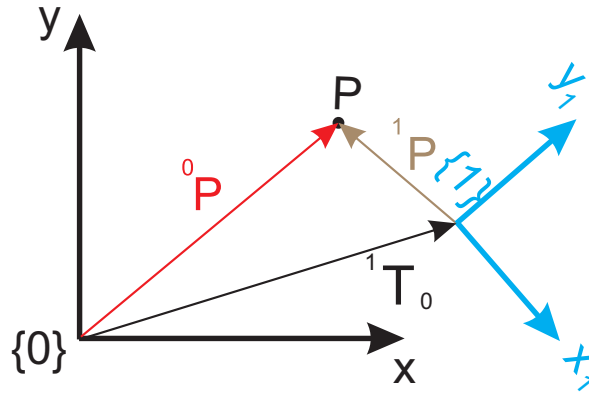


Figura 2.2: Punto en dos marcos de referencias $\{1\}$ y $\{0\}$

En la figura 2.2 el vector 0P describe la posición del punto P respecto al marco de referencia $\{0\}$, el vector 1P representa el punto P descrito en el marco $\{1\}$ y el vector 1T_0 es la representación del marco de referencia $\{1\}$ visto en el marco de referencia $\{0\}$.

Cuando se comparan los marcos de referencia $\{0\}$ y $\{1\}$, se evidencia que entre ellos existen dos componentes como son la traslación y la rotación. Cuando se formaliza matemáticamente la representación del marco $\{1\}$ respecto al marco $\{0\}$ se puede expresar como:

$${}^0P = {}^1T_0 {}^1P \quad (2.1)$$

Donde la ecuación 2.1 expresa el punto P visto desde el marco de referencia $\{0\}$ es igual a un elemento transformador 1T_0 por el vector que describe el punto P en el marco $\{1\}$. De la ecuación 2.1 falta solo por conocer el elemento transformador 0T_1 , el cual contiene la información de la rotación entre los ejes y la traslación de los orígenes. Esta matriz es conocida como matriz de transformación homogénea (MTH).

Para realizar una representación en dos dimensiones se utiliza un sistema Cartesiano, este cuenta con los ejes ortonormales x y y , donde el eje x representa la horizontal, el eje y la vertical y $\{0\}$ el origen del sistema. La representación de un punto en el plano cartesiano es dada como la pareja ordenada (x, y) . Si se realiza la extrapolación a un sistema tridimensional el sistema cartesiano tendría la tripla (x, y, z) como se observa en la figura 2.1(b).

Dentro de la matriz homogénea se encuentra la matriz de rotación, para deducir esta matriz se analizará la figura 2.3(a) donde por geometría se encontrarán los valores de las coordenadas del punto descrito en ambos marcos de referencia. Allí se observa que los orígenes son coincidentes y los ejes se encuentran rotados un ángulo θ .

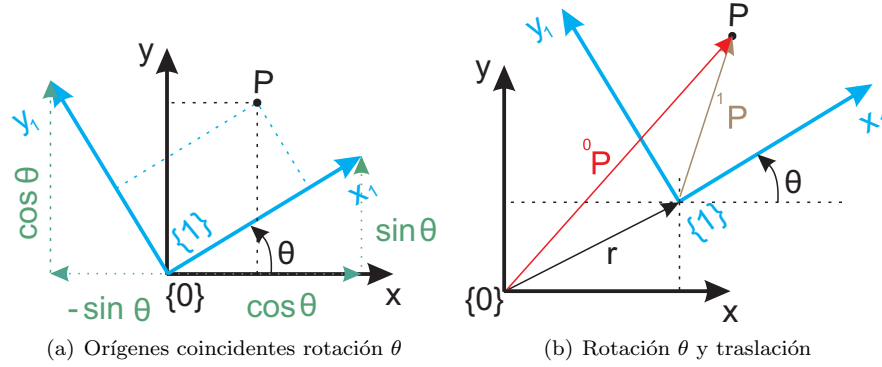


Figura 2.3: Rotación y traslación

El punto P , que se encuentra descrito en el marco de referencia $\{0\}$, se puede describir en el marco de referencia $\{1\}$ de la siguiente manera:

$${}^0P = {}^0x \hat{x}_1 + {}^0y \hat{y}_1 \quad (2.2)$$

$$\hat{x}_1 = \cos\theta + \sin\theta \quad (2.3)$$

$$\hat{y}_1 = -\sin\theta + \cos\theta \quad (2.4)$$

Donde \hat{x} y \hat{y} son vectores unitarios en dirección de los ejes base donde se encuentran descritos. Al escribir estas ecuaciones en forma matricial se obtiene la ecuación 2.5.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

De la ecuación 2.5 se puede extraer la matriz de rotación sobre el eje z . Esta matriz se denomina así ya que la rotación que se realiza está dada sobre este eje. Al extraer los elementos de la matriz con la variable θ se obtiene la ecuación 2.6.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Al llevar la matriz de rotación de un sistema bidimensional a un sistema tridimensional y generalizando la rotación para los ejes x, y y z se encuentra,

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Con las ecuaciones 2.7 - 2.9 es posible encontrar la representación de un cuerpo que este rotado respecto a un marco de referencia en cualquiera de sus ejes.

Para que una matriz sea de rotación debe cumplir las siguientes propiedades:

- Debe ser ortogonal.
- Las columnas son vectores unitarios.
- El determinante es unitario $\det(R) = 1$.
- La matriz de rotación multiplicada por su transpuesta es igual a la matriz identidad $R \cdot R^T = I$.

Después de desarrollar la parte de rotación se plantea la traslación. Como se observa en la figura 2.3(b) el vector r representa la traslación del marco $\{1\}$ respecto al marco $\{0\}$. Si los ejes de los marcos de referencia se encuentran paralelos y congruentes, la traslación se define como la suma de las componentes; pero si estos ejes no se encuentran paralelos se procede a realizar la rotación y después la suma de los vectores de traslación resultante. Esto se puede representar matemáticamente en la ecuación 2.10 en donde 1x en la representación del punto P visto en el marco $\{1\}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^0x \\ {}^0y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^1x \\ {}^1y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1x \\ {}^1y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1x \\ {}^1y \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Escrita en forma generalizada, se tiene la siguiente representación matemática:

$$\begin{bmatrix} {}^0x \\ {}^0y \\ {}^0z \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_{1[3 \times 3]} & t_{[3 \times 1]} \\ \hline 0_{[1 \times 3]} & 1_{[1 \times 1]} \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^1x \\ {}^1y \\ {}^1z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A la derecha de la ecuación 2.11 el primer componente es una matriz compuesta con varios elementos. En la parte superior izquierda de la matriz central se encuentra la matriz de rotación ${}^0R_{1[3 \times 3]}$, en la parte superior derecha el vector de traslación $t_{[3 \times 1]}$ y en la parte inferior se complementa la matriz para dejarla de forma homogénea. En adelante esta matriz se denominará matriz de transformación homogénea (*MTH*) y será designada con la letra **T**.

Con la matriz de transformación homogénea se puede determinar totalmente la posición de un objeto ya sea que este se encuentre rotado, trasladado o la combinación de ambas situaciones.

2.2 Cinemática Directa.

Un robot industrial está compuesto por eslabones, articulaciones, base, muñeca y efector final. Un eslabón se puede definir como una parte del cuerpo del robot los cuales son unidos por las articulaciones, además son piezas rígidas con geometrías no regulares. Las articulaciones son puntos de unión los cuales permiten el movimiento relativo entre los eslabones, en general allí se encuentran los actuadores de los robots que en la mayoría de los casos son de tipo rotacional o prismática. Una articulación de tipo rotacional se encuentra asociada con un actuador rotativo como servomotores, motores a paso y motores neumáticos o hidráulicos. Las articulaciones prismáticas permiten desplazamientos a lo largo de un eje y los actuadores de este tipo de juntas son motores lineales, pistones neumáticos e hidráulicos.

Tanto las articulaciones prismáticas como las rotaciones tienen la característica de solo poseer un grado de libertad, en la mayoría de los casos cada articulación agrega un movimiento en un nuevo espacio. Los eslabones y las articulaciones son importantes al momento de aplicar la cinemática directa puesto que estos detallan la geometría y las relaciones de movimiento del robot.

Otro de los componentes se denomina base dado que es la parte donde el robot descansa con todo su peso además de generar un punto de fijación sea móvil o fijo. La muñeca es la parte del robot que permite generar movimientos de rotación y así desarrollar orientaciones en el sistema. El efector final es la herramienta específica diseñada para que el robot realice la tarea programada e interactúe con el medio.

La cinemática directa estudia la relación existente entre las articulaciones del robot y la posición del efector final, es decir, cuando un robot se desplaza existe un cambio de posición en sus articulaciones, este movimiento es medido a través de diferentes sensores como pueden ser encoders lineales o rotativos. Al conocer la posición de las articulaciones es necesario realizar una transformación matemática que permita conocer la posición del efector final del robot, a esta transformación se le conoce como la cinemática directa del robot.

La aplicación de la cinemática directa es única para cada modelo de robot industrial, además en el cálculo de esta no se tienen en cuenta las fuerzas ni torques que se generan debido a la interacción del robot con el ambiente, lo cual conlleva que el análisis sea estrictamente geométrico. El análisis de posición siempre se realiza respecto a un sistema de referencia fijo, en general este sistema se asocia en la base del robot. Una forma de expresar la cinemática directa de un robot de 6 grados de libertad matemáticamente es la siguiente:

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.12)$$

$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.13)$$

$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.14)$$

$$\theta = f_\theta(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.15)$$

$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.16)$$

$$\phi = f_\phi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.17)$$

Donde $x, y, z, \theta, \beta, \phi$ son las variables del espacio de trabajo y $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ son variables descritas en el espacio articular. Como se observa la cinemática está asociada a una transformación matemática, que permite relacionar las variables articulares con las variables espaciales en donde no intervienen fuerzas externas ni internas en el modelo.

Una de las formas para calcular la cinemática directa es la utilización de las relaciones trigonométricas y geométricas del robot, pero esta técnica presenta falencias cuando la geometría del robot es mayor a tres grados de libertad dado que su cálculo se torna dispendioso.

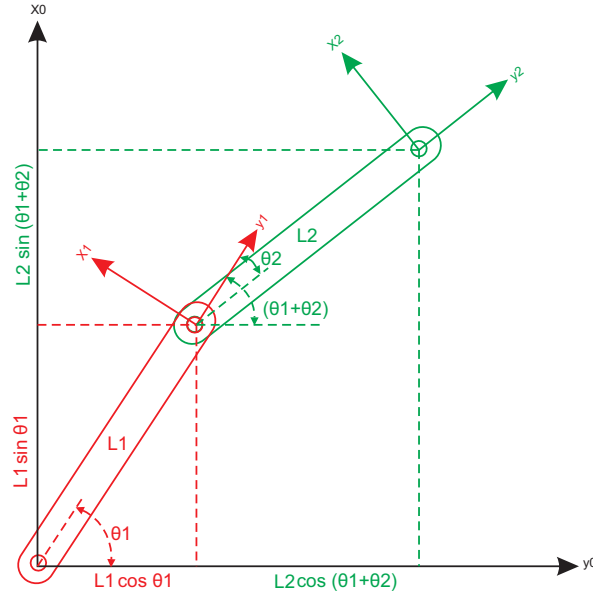


Figura 2.4: Robot planar 2 grados de libertad

En la figura 2.4 se observa como ejemplo un robot planar en donde la cinemática directa es calculada con la ayuda de funciones trigonométricas:

Se requiere encontrar la posición del marco de referencia 2 a través de las variables θ_1 y θ_2 . En la figura 2.4 se observa que el movimiento es descompuesto en dos partes, la primera es calcular el origen del marco $\{1\}$ visto en el marco $\{0\}$, dado por las siguientes expresiones matemáticas:

$${}^0x_1 = L_1 \cos \theta_1 \quad (2.18)$$

$${}^0y_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad (2.19)$$

Ahora las ecuaciones que describen el marco $\{2\}$ en el marco $\{1\}$ son:

$${}^1x_2 = L_2 \cos \theta_2 \quad (2.20)$$

$${}^1y_2 = L_2 \sin \theta_2 \quad (2.21)$$

Al analizar θ_2 se observa que éste está definido respecto al marco de referencia $\{1\}$, para encontrar el aporte en la distancia del eslabón 2. Es necesario expresar sus coordenadas respecto al marco $\{0\}$, para lograr esto se requiere sumar θ_1 y θ_2 , así el ángulo resultante estará descrito respecto al marco $\{0\}$ y posteriormente es necesario sumar las respectivas componentes de cada articulación. Lo anterior expresado de forma matemática se define como:

$${}^0x_2 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_2 + \theta_1) \quad (2.22)$$

$${}^0y_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_2 + \theta_1) \quad (2.23)$$

Con el desarrollo del ejemplo se evidencia que con la ayuda de funciones trigonométricas se puede realizar el cálculo de la cinemática del robot planar, y por otra parte se puede inferir que el desarrollo

trigonométrico de la solución para hallar la cinemática directa resulta más complejo a medida que aumentan los grados de libertad del sistema.

Otra forma de encontrar la cinemática directa de una manera sistemática fue desarrollada por Denavit y Hartenberg [7] (D-H), quienes proponen un método de descripción del robot por medio de 4 parámetros con lo cual solo es necesario utilizar matrices homogéneas para la descripción del robot serial. Lo propuesto por D-H consiste en colocar cada marco de referencia en una ubicación específica y con una orientación única. Una de las ventajas al ubicar los marcos de referencia de cada eslabón según los parámetros D-H es describir el robot con una reducción de 6 a 4 variables y así reducir el número de ecuaciones utilizadas. De acuerdo con los siguientes pasos es posible situar los marcos de referencia con su orientación:

1. El primer marco de referencia se ubica en la base del robot y es el número 0.
2. El eje z siempre está en dirección de la articulación es decir si es rotacional el eje z está sobre el eje rotativo, si es prismática el eje z está en dirección del desplazamiento.
3. El eje x_i deberá interceptar el eje z_{i-1} en algún punto.
4. El eje x estará perpendicular a eje z .

Las siguientes son las 4 transformaciones definidas por D-H, las cuales consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el marco de referencia $i-1$ con el i -ésimo.

1. Rotación alrededor del eje Z_{i-1} un ángulo θ_i .
2. Traslación a lo largo de Z_{i-1} una distancia d_i .
3. Traslación a lo largo de X_i una distancia a_i .
4. Rotación alrededor del eje X_i un ángulo α_i .

La matriz homogénea que define esta transformación se puede calcular al realizar la posmultiplicación, dada por la siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}A_i &= Rotz(\theta_i)T(0, 0, d_i)T(a_i, 0, 0)Rotx(\alpha_i), \text{ que al ser desarrollada,} \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24) \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En donde $C\theta$ es coseno de θ y $S\theta$ es seno de θ .

Los parámetros a_i y α_i son conocidos como parámetros de construcción del eslabón y los parámetros θ_i y d_i representan la conexión entre eslabones. Para asignar los valores adecuados de los parámetros D-H es necesario ubicar los marcos de referencia de forma adecuada. Los parámetros D-H se pueden describir con la ayuda de la figura 2.5.

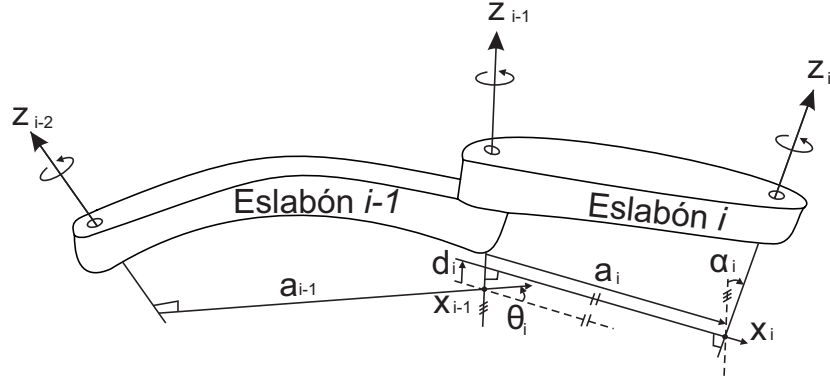


Figura 2.5: Asignación de marcos por D-H

Al obtener los marcos de referencia como se describe se procede a calcular los parámetros D-H como se observa en la figura 2.5, en donde a_i es la distancia de la perpendicular entre los ejes z_i y z_{i-1} , el parámetro d_i es la mínima distancia entre el *origen* _{$i-1$} y el *origen* _{i} , el parámetro θ_i es el ángulo existente entre los ejes x_i y x_{i-1} y el parámetro α_i es en ángulo de torsión generado entre los ejes z_i y z_{i-1} . Debido a la construcción del robot el parámetro a_i siempre es una constante al igual que α_i , pero los parámetros θ_i y d_i según sea el tipo de articulación pueden ser variable o fija. Por ejemplo para las articulaciones de tipo rotacional el parámetro θ_i es variable según el ángulo de la articulación, pero si la articulación es de tipo prismática el parámetro que varía será d_i .

Conocidos todos los parámetros necesarios para resolver la ecuación 2.24 se puede hallar ${}^{i-1}A_i$, con esta ecuación se obtiene la cinemática directa, lo anterior dado a que el resultado de esta ecuación permite encontrar la relación de cada uno de los marcos de referencia.

La cinemática directa de un robot de 6 grados de libertad se puede expresar con la ecuación 2.2 de la siguiente manera:

$${}^0A_6 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

Al aplicar este método al ejemplo de la figura 2.4 se obtiene la siguiente tabla de parámetros D-H

Tabla 2.1: Tabla de parámetros D-H

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	L_1	0	0	θ_1
2	L_2	0	0	θ_2

Posteriormente reemplazando los valores en las matrices de transformación 2.2 se obtiene:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & L_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & L_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$${}^0T_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 \quad (2.27)$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Donde se observa que la parte de traslación de la matriz es igual a la ecuaciones 2.23 y 2.22. Es de notar que este método posee una menor complejidad, pero se requiere de especial atención al momento de ubicar los marcos de referencia dado que es un error común no realizarlo de la forma correcta que conduce a resultados erróneos.

2.3 Cinemática Inversa.

El problema de la cinemática inversa consiste en encontrar los valores de las variables articulares, teniendo como valor de entrada la orientación y posición del efector final con relación al marco de referencia de la base del robot. Una forma de expresarlo matemáticamente es:

$$q_i = f_i({}^0T_n(x, y, z, \theta, \phi, \alpha)) \quad (2.29)$$

En donde q_i son las variables de las articulaciones del robot y 0T_n es la matriz homogénea del efector final vista desde la base.

Aplicar una metodología sistemática para el desarrollo de la cinemática inversa de los robots no es una tarea fácil debido a la naturaleza del proceso matemático, la obtención de las ecuaciones es dependiente de la configuración propia del robot. En la literatura se encuentran métodos para la solución de la cinemática inversa a partir de métodos de optimización heurística [19], en donde se pretende a través de la cinemática directa realizar cierta cantidad de iteraciones hasta encontrar los valores que convergen en la solución, pero con la deficiencia que es posible que se alcance el número de iteraciones y la solución no converja y presente errores. Este es uno de los problemas con este tipo de algoritmo además del gran costo computacional que demanda este tipo de soluciones.

Actualmente un buen número de los sistemas robóticos cuentan con cinemáticas relativamente sencillas de calcular o ampliamente estudiadas. Si se realiza un análisis en la mayor parte de los robots los tres primeros actuadores se pueden asociar a la posición en el espacio tridimensional y los últimos 3 actuadores se encargan de darle la orientación al efector final. En general el punto donde se realiza la orientación del efector final es llamado muñeca.

Otra forma de encontrar las variables q_i es solucionar el sistema de ecuaciones resultante de la cinemática directa, es decir, se puede obtener la matriz de transformación 0A_i descrita en las variables independientes q_i e igualarla a la matriz homogénea del efector final., Esto genera como resultado un sistema de 6 ecuaciones que en muchos casos son linealmente dependientes, en donde no es fácil desarrollar y encontrar una solución que sea rápida computacionalmente.

En el ejemplo desarrollado de la figura 2.4 para calcular la cinemática inversa se utiliza el método geométrico. Como se observa en la figura 2.6(a), es posible hallar el punto $P(x, y)$ con la ley del coseno y a partir de este encontrar dos posibles soluciones. En la figura 2.6(b) se observa una solución alterna para la ubicación del punto P en el mismo punto.

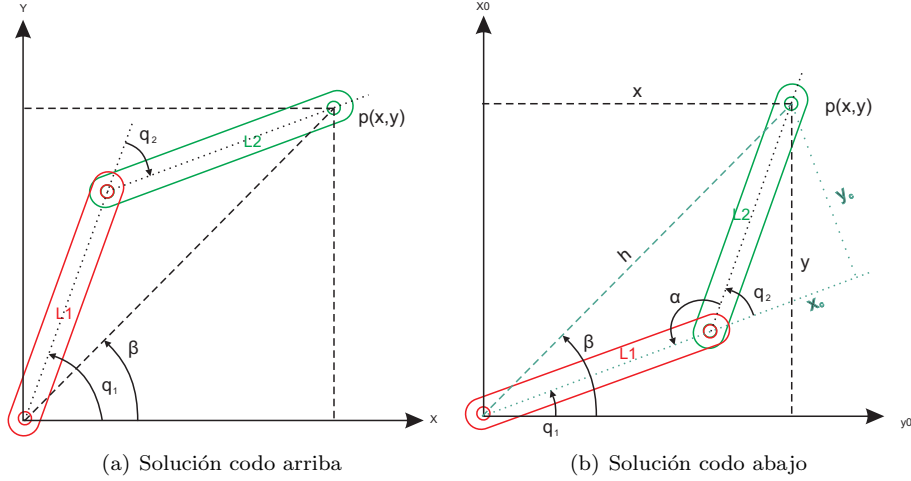


Figura 2.6: Solución cinemática inversa

2.4 Cinemática Diferencial.

Análisis de Velocidad.

Para obtener el análisis de velocidad de un cuerpo que se encuentra en movimiento de traslación y rotación sobre un eje, es necesario realizar una descomposición de la velocidad en dos componentes, una producida por la rotación y otra en una velocidad lineal. Como se observa en la figura 2.7 el sistema tiene un actuador rotacional “motor” el cual hace que el cuerpo rote sobre el eje del motor, los diferentes puntos de este cuerpo experimentan una velocidad angular y una velocidad lineal.

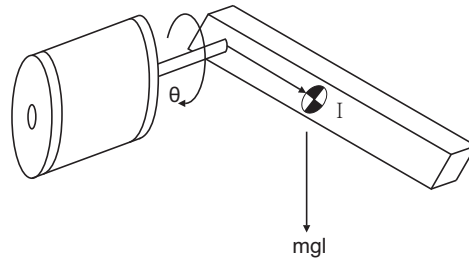


Figura 2.7: Sistema de un grado de libertad

Para cada punto del cuerpo que se encuentra rotando bajo la acción del motor existe un único ángulo de barrido, este ángulo se mantiene igual para cada uno de los puntos del cuerpo. Por tal motivo la velocidad angular en cada uno de los puntos incluyendo el centro de gravedad es la misma, siendo expresada como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} \quad (2.30)$$

Donde \vec{k} es un vector unitario en la dirección de la velocidad angular y $\dot{\theta}$ es la derivada en el tiempo de la posición angular θ . Obteniendo la velocidad angular del cuerpo se puede calcular la velocidad lineal en cualquier punto de este. En la ecuación 2.31 se tiene \vec{r} como el vector desde el eje de rotación al punto donde se requiere determinar la velocidad lineal.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.31)$$

En el estudio de la robótica más que el movimiento de un punto en el cuerpo, se requiere obtener el movimiento de los marcos de referencias que están asociados según la notación D-H a cada cuerpo del sistema. Como se ha mencionado, la velocidad angular calculada es la debida a ese cuerpo y expresada en su propio marco de referencia. Para calcular la velocidad angular y lineal del cuerpo expresada en el origen del marco $S\{0\}$ se hace necesaria la transformación de la velocidad angular y lineal de su marco de referencia $S\{n\}$ al marco de referencia del origen $S\{0\}$ o a cualquier otro marco donde se desee conocer las velocidades angulares y lineales.

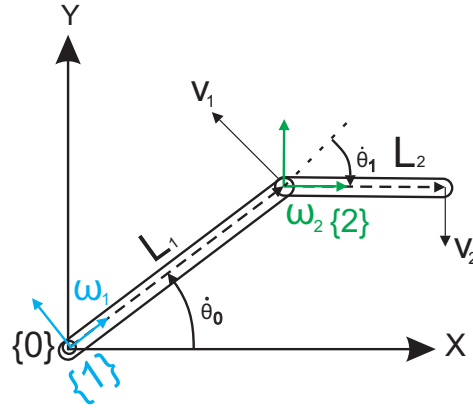


Figura 2.8: Sistema de 2 eslabones velocidades angulares y lineales

En la figura 2.8 se observan 2 eslabones, cada uno con su marco de referencia según la notación D-H y el sistema $S\{0\}$ siendo el origen. Cuando se encuentra la velocidad angular $\vec{\omega}_1$ esta se describe sobre el marco de referencia donde se produce la rotación $S\{0\}$, lo que puede expresarse como ${}^0\vec{\omega}_1$. Al analizar la ecuación 2.30 se tiene que $\dot{\theta}$ realiza un producto punto con \vec{k} y la dirección de este vector es el eje de giro del eslabón. Cuando estos ejes no son paralelos la suma de las velocidades angulares no es posible hallarla de forma escalar. Para realizar esta suma se utiliza la matriz de rotación como el elemento que transforma los vectores de la velocidad angular. Una forma de expresar esto es:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{0,n}^0 &= \vec{\omega}_{0,1}^0 + R_2^0 \vec{\omega}_{2,3}^2 + R_3^0 \vec{\omega}_{3,2}^3 + \dots + R_{n-1}^0 \vec{\omega}_{n-1,n}^{n-1} \\ &= \vec{\omega}_{0,1}^0 + \vec{\omega}_{2,3}^0 + \vec{\omega}_{3,4}^0 + \dots + \vec{\omega}_{n-1,n}^0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Donde R_n^0 es la matriz de rotación de cada eslabón vista desde el origen y $\vec{\omega}_{0,n}^0$ es la velocidad angular total del sistema en el marco de origen del sistema $S\{0\}$.

La velocidad lineal de un punto que se encuentra en un cuerpo se puede definir como el producto cruz entre la velocidad angular y el vector que existe entre el punto y el eje de rotación. En la ecuación 2.31 este vector es definido como \vec{r} y como la velocidad angular $\vec{\omega}$, al igual que la velocidad angular la velocidad lineal debe ser expresada bajo el mismo marco de referencia. Como ya se definió la velocidad angular respecto al marco de referencia de base, solo queda el vector \vec{r} expresado en su propio marco de referencia. Este vector deberá ser expresado en el mismo marco de referencia donde se encuentra la velocidad angular.

Análisis del Jacobiano.

Teniendo en cuenta el concepto visto sobre el análisis de velocidad, en el cual, se examina la velocidad de cada eslabón generada por el actuador en dicho cuerpo, es preciso aclarar que al momento de aplicar este concepto a los sistemas de robot seriales se debe tener en cuenta que los eslabones del robot se encuentran unidos entre si y cada uno tiene su propio actuador lineal o rotativo. Para el estudio de esta clase de velocidad aplicada sobre las articulaciones del robot y lograr expresar la velocidad del efector final con respecto al marco de referencia inicial $S\{0\}$ es necesaria una relación de la velocidad de las articulaciones con la velocidad del efector final.

La velocidad que puede experimentar un cuerpo que se encuentra en el espacio sin ninguna restricción es de 2 tipos, velocidad angular y velocidad lineal. La velocidad lineal posee 3 componentes en cada eje (x, y, z) al igual que la velocidad angular $(w_x \ w_y \ w_z)$ en total son 6 componentes. Como se observa en la ecuación 2.33, la parte a del vector representa la velocidad lineal y la parte b representa la velocidad angular asociada al sistema robótico.

$$\underbrace{[\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]}_a \quad \underbrace{[w_x \ w_y \ w_z]}_b \quad (2.33)$$

En el estudio de la cinemática directa se obtiene la matriz de transformación homogénea que relaciona las variables articulares con la posición final del efector. De esta misma forma existe una relación entre la velocidad de las articulaciones y la velocidad del efector final; esta relación puede expresarse como $\dot{v} = J(q)\dot{q}$, donde $J(q)$ se conoce como el operador Jacobiano. El Jacobiano es una matriz formada por las derivadas parciales de una función, en la robótica esta función es dependiente de la posición de los actuadores en las uniones del eslabón. Uno de los inconvenientes del Jacobiano es que para cada posición del robot se debe realizar un cálculo para obtener la velocidad instantánea del efector final.

Una forma de encontrar la velocidad de efector final es derivar las funciones de la cinemática directa, por ejemplo la ecuaciones 2.34 - 2.39 representan la cinemática directa de un robot de 6 grados de libertad.

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.34)$$

$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.35)$$

$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.36)$$

$$\theta = f_\theta(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.37)$$

$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.38)$$

$$\phi = f_\phi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.39)$$

Donde $f_m(q_1 \dots q_n)$ son las funciones de la posición y rotación en el espacio de trabajo del robot generada por los eslabones, es decir, existen f_m funciones como grados de libertad y derivadas parciales como eslabones en el robot.

Al aplicar la derivada a ambos lados de las ecuaciones 2.34 - 2.39 se puede obtener:

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\delta f_x}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.40)$$

$$\dot{y} = \sum_1^n \frac{\delta f_y}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.41)$$

$$\dot{z} = \sum_1^n \frac{\delta f_z}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.42)$$

$$\dot{\theta} = \sum_1^n \frac{\delta f_\theta}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.43)$$

$$\dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\delta f_\beta}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.44)$$

$$\dot{\phi} = \sum_1^n \frac{\delta f_\phi}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (2.45)$$

Llevándolo a la forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_a \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Donde:

$$J_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

J_a es conocida como la matriz jacobiana analítica, con un tamaño $m \times n$ en donde m es el número de grados de libertad y n el número de variables independientes “articulaciones”. Se puede generalizar el Jacobiano como una transformación lineal entre las velocidades de las articulaciones \dot{q} a las velocidades del espacio de trabajo \dot{x} .

Además del Jacobiano analítico existe el Jacobiano geométrico el cual analiza la velocidad de los eslabones de forma vectorial. Como el eslabón puede contener un actuador lineal o rotacional, la velocidad geométrica cambia según sea el actuador examinado en el eslabón. El resultado obtenido dependerá del tipo de articulación analizada, prismática o rotacional.

Articulación prismática:

Cuando una articulación es de tipo prismática y las demás son fijas, esta unión imprime un movimiento de tipo traslación, lo que indica que no hay componentes de velocidad angular en el cuerpo pero si velocidad lineal. Para obtener el Jacobiano geométrico se tiene la figura 2.9 donde se observa que se cuenta con una articulación prismática en la parte superior de la figura y la descripción de los vectores O_{n-1} y O_n , en donde este último cambiará de acuerdo al valor tomado por la variable d de la figura 2.9.

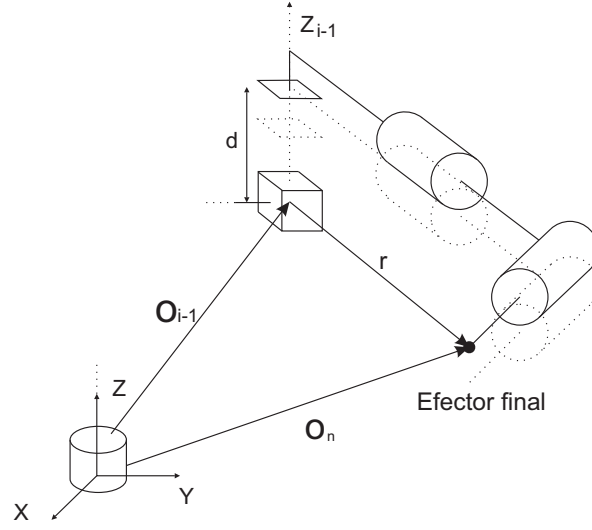


Figura 2.9: Movimiento del efector final debido a una articulación prismática [23]

La velocidad lineal del efector final se puede expresar como:

$$O_n = \dot{d} \cdot z_{i-1} \quad (2.47)$$

Si se hace una separación de los elementos del Jacobiano debido a una articulación prismática se obtiene:

$$J = \begin{bmatrix} j_v \\ j_w \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$j_v = \dot{d} \cdot z_{i-1} \quad (2.49)$$

$$j_w = 0 \quad (2.50)$$

Articulación rotacional:

En la figura 2.10 se tiene una articulación de tipo rotacional y las demás fijas, la variable independiente θ hace que el vector O_n cambie su tamaño a una velocidad determinada por $\dot{\theta}$. La velocidad lineal del efector final está dada por $\vec{\omega} \times \vec{r}$, donde la velocidad angular del efector final es $\vec{\omega} = \dot{\theta} \cdot z_{i-1}$. Remplazando en la ecuación 2.31 se obtiene:

$$\vec{v} = \dot{\theta} \cdot z_{i-1} \times \vec{r} \quad (2.51)$$

$$\vec{r} = O_n - O_{i-1} \quad (2.52)$$

$$j_v = z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \quad (2.53)$$

$$j_w = z_{i-1} \quad (2.54)$$

En resumen se puede decir que el Jacobiano geométrico se obtiene de acuerdo a cada eslabón analizado según el tipo de articulación que posea. La parte de la velocidad lineal del Jacobiano se define como:

$$j_{vi} = \begin{cases} z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) & \text{Rotacional} \\ z_{i-1} & \text{Prismática} \end{cases} \quad (2.55)$$

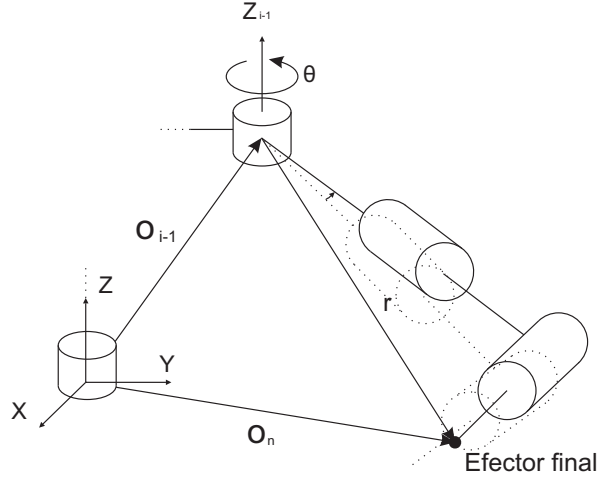


Figura 2.10: Movimiento del efector final debido a una articulación de rotacional [23]

Y la parte de velocidad angular es:

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{Rotacional} \\ 0 & \text{Prismática} \end{cases} \quad (2.56)$$

El Jacobiano además de relacionar las velocidades del espacio articular al espacio cartesiano, posee varios usos adicionales como por ejemplo conocer las singularidades del robot. Una singularidad es una restricción física o de cálculo matemático que sufre el robot. Una forma matemática de conocer la presencia de estos puntos es cuando el rango del Jacobiano es menor que el número de variables independientes del robot-La forma matemática de expresarlo es:

$$\text{Rank}(J) \leq \max_q \quad (2.57)$$

Lo que indica que si el Jacobiano pierde rango, el manipulador está muy cerca de una singularidad.

La matriz Jacobiana también puede ser utilizada para realizar un análisis estático de las fuerzas del efector final reflejadas en las articulaciones. En la ecuación 2.58 se observa como el Jacobiano establece una relación entre el torque y la fuerza que existe en el efector final del robot, esta fuerza se puede determinar como la interacción del robot con el ambiente. La fuerza es reflejada como un torque τ en las articulaciones del robot como se ve en la ecuación 2.58. El Jacobiano es multiplicado por el vector de fuerzas en el espacio de trabajo y se obtiene como resultado el torque de reacción en las articulaciones τ para mantener el equilibrio.

$$\tau = J^T(q)F \quad (2.58)$$

La aceleración en las articulaciones o en el espacio de trabajo es otra variable que también puede ser encontrada con la ayuda del Jacobiano. La expresión de velocidad en el espacio de trabajo se puede escribir como $\dot{x} = J \cdot \dot{q}$, si se aplica la derivada de esta se obtiene:

$$\ddot{x} = \dot{J} \cdot \dot{q} + J \cdot \ddot{q} \quad (2.59)$$

En resumen, el Jacobiano de un robot es una de las herramientas matemáticas más importantes en el análisis de los sistemas robóticos, debido a su gran cantidad de usos en la parte cinemática (análisis de singularidades en la posición), de control y la dinámica del robot.

Capítulo 3

CRITERIOS DE SELECCIÓN DE UN ROBOT INDUSTRIAL

En este capítulo se pretende encontrar un robot industrial que satisfaga las necesidades del corte de rebaba, para alcanzar este objetivo se utilizan varios conceptos y se define la ecuación de Grübler y Kutzbach que incorpora los posibles grados de libertad de un mecanismo, la influencia de la arquitectura y de los actuadores del robot sobre estos. Por otra parte también es necesario analizar elementos como el espacio de trabajo, su definición y las posibles geometrías dependiendo de la arquitectura y los grados de libertad; la carga del robot y sus respectivas variaciones como lo son carga útil y carga real, la representación de un diagrama de carga y los rangos de carga presentes en los robots industriales; la repetitividad y la resolución junto con el desarrollo de los posibles factores de error en posicionamiento como pueden ser la mecánica y el procesamiento electrónico de las señales del robot; y por último los sectores de aplicación, allí se desglosan 5 actividades principales donde tiene cabida la robótica industrial, siendo estos: la manipulación de piezas, soldadura, ensamble, dosificación y procesos. Todos los conceptos y elementos vistos en conjunto permiten seleccionar el robot más adecuado en la tarea de corte de rebaba en sillas plásticas.

3.1 Grados de libertad.

Tsai [26] define los grados de libertad de un mecanismo como el número de parámetros independientes o de entradas necesarias para especificar completamente un mecanismo.

Un grado de libertad se asocia a la capacidad de un cuerpo para desplazarse en una dirección o de rotar sobre un eje fijo[26]. Como se observa en la figura 3.1 el cubo puede desplazarse en cualquier dirección (X_a, Y_b, Z_c) además de rotar sobre cualquier eje (α, β, θ) o combinación de los ejes. Con lo anterior se concluye que este cuerpo posee entonces 6 grados de libertad.

Una forma matemática de obtener los grados de libertad de un mecanismo es conocida como el criterio de Grübler y Kutzbach [26], este criterio se aplica cuando se conocen algunos aspectos de la construcción del robot como el número de eslabones, además del número y el tipo de uniones. Con estas características es posible encontrar el número de grados de libertad del robot al aplicar la ecuación 3.1.

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_j f_i \quad (3.1)$$

Donde:

De acuerdo con los grados de libertad que posee un robot industrial se determina la arquitectura de construcción, Los robots industriales de tres grados de libertad se clasifican en dos tipos: los cartesianos y los articulares. Los de tipo cartesiano están formados por tres actuadores lineales como se ve en la figura 3.2(a), este tipo de actuadores les permiten realizar desplazamientos en el espacio (x, y, z) de forma lineal. Los robots articulares poseen actuadores rotativos, los cuales pueden generar una fuerza

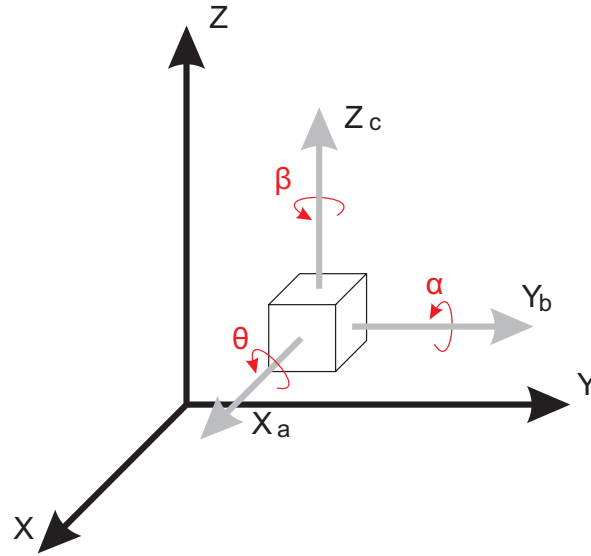


Figura 3.1: Cubo con 6 grados de libertad

- F : Grados de libertad del mecanismo (Freedom)
- λ : Grados de libertad posibles movimiento en el espacio ($\lambda = 3$ planar, $\lambda = 6$ espacial)
- n : Número de eslabones del mecanismo
- j : Número de uniones del mecanismo
- f_i : Grados de libertad permitidos por unión

de rotación sobre su propio eje. Un ejemplo de la mezcla entre actuadores rotativos y lineales es un robot SCARA el cual se observa en la figura 3.2(b), este posee una arquitectura serial, dos actuadores rotativos que le permiten la ubicación en los ejes (x, y) y un actuador prismático que le permite la ubicación sobre el eje z . Es importante resaltar que este tipo de robot también posee 4 grados de libertad debido a que en el último eslabón es posible agregar un actuador rotativo, lo que le permite además de ubicarse en el espacio (x, y, z) una rotación sobre el eje z . Esto aplica tanto para el robot tipo SCARA como para el Gantry.



(a) Robot Gantry FlexMotion4-4 [13]



(b) Robot SCARA IBM 7540 [15]

Figura 3.2: Ejemplo de robots con tres grados de libertad

Los robots seriales industriales de 5 GDL en general son de tipo articular al igual que los de 6 GDL,

por ejemplo los robots de 5 GDL poseen la capacidad de desplazarse en las 3 dimensiones (x, y, z) , además de realizar rotaciones sobre 2 de sus ejes principales o rotar sobre sus 3 ejes principales y desplazarse en solo 2 dimensiones por ejemplo (x, y) completando así 5 GDL.

Los robots de 6 GDL pueden alcanzar cualquier punto con cualquier orientación que se encuentre dentro de su espacio de trabajo útil. Como se observa en la figura 3.3 este tipo de robot cuenta con 6 actuadores rotativos los cuales le permiten generar 6 GDL. Una característica que se cumple en la mayoría de los casos es que los grados de libertad corresponden al número de actuadores principales del robot.

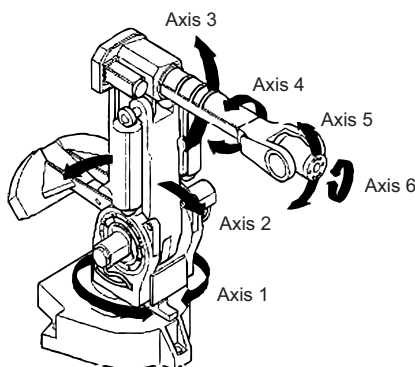


Figura 3.3: Robot articulado 6 grados de libertad [1]

En los sistemas robóticos industriales, el hecho de dimensionar correctamente los grados de libertad se ve reflejado proporcionalmente con el valor económico del robot, dado que el poseer un mayor número de grados de libertad implica el uso de un mayor número de eslabones, actuadores y un sistema de control más sofisticado. Por este motivo no es recomendable sobredimensionar los grados de libertad que el robot industrial va a tener.

3.2 Espacio de trabajo.

El espacio de trabajo de un robot industrial podría definirse como el conjunto de posiciones alcanzables por el efector final, existen dos clases de espacios, el espacio alcanzable y el espacio de trabajo útil. Con la notación (i) se denomina “El espacio alcanzable”, el cual hace referencia a todas las posiciones que pueden ser alcanzadas con al menos una sola orientación en el efector final [22]. En la figura 3.4, en la zona “a” se observa que el punto más externo del brazo se encuentra en el límite de este espacio, la muñeca que es el punto de rotación del último eslabón se encuentra dentro del espacio alcanzable. Al mantener la muñeca en la posición extendida el punto alcanzado solo será en la orientación actual, en general los puntos que conforman la superficie límite del espacio de trabajo sólo se pueden alcanzar con una sola orientación. Estos puntos tienen una característica llamada singularidad, la cual se define como los puntos en el espacio de trabajo donde el manipulador requiere de grandes cantidades de energía para alcanzarlos o la imposibilidad de moverse en ciertas direcciones u orientaciones[25], lo anterior se refleja en la solución de las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento del robot, las cuales podrían tener infinitas soluciones en ciertas posiciones.

La distancia del punto más alejado del eje de la base del robot dentro del espacio de trabajo es una de las características suministradas por los fabricantes y es conocida como el *alcance máximo* del robot. Los puntos que están en la superficie que limita el espacio de trabajo son singulares [25], ya que son alcanzados cuando el robot se encuentra en una configuración de mayor alcance; las fuerzas ejercidas en esos puntos pueden ser inmensamente grandes y no lograr ningún desplazamiento. Por otra parte (ii) denomina “El espacio de trabajo útil”, el cual es un subespacio del anterior donde se permite que el punto más externo del brazo posea varias orientaciones. En la figura 3.4 la zona blanca

puede determinarse como el espacio útil, en la parte “b” se observa que el punto de rotación de la muñeca se ubica sobre el límite de este espacio [22].

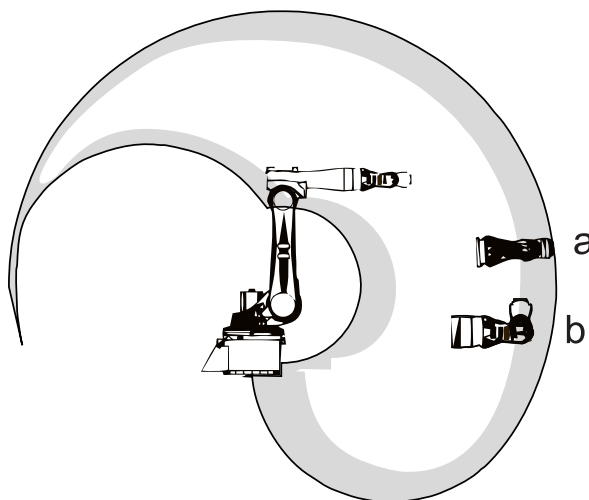


Figura 3.4: Espacio de trabajo[16]

Al diferenciar los espacios de trabajo que posee un robot industrial, se realiza una adecuada caracterización del espacio necesario en la ejecución de la tarea para la cual se requiere el robot.

Es importante resaltar que la forma del espacio de trabajo de un robot industrial está asociada a la arquitectura utilizada en la construcción del robot. Así por ejemplo, el espacio de trabajo del tipo Stewart Gough posee limitaciones en su alcance, debido a que cada eslabón es independiente de la posición de los otros eslabones, esta independencia hace que los eslabones alcancen puntos más cercanos a sus articulaciones. Como se aprecia en la figura 3.5 el espacio de trabajo de una plataforma Stewart Gough tiene la forma de un cascarón, donde el espacio es limitado en el centro. A diferencia de la arquitectura de un robot serial, en donde los eslabones se encuentran dispuestos de tal forma que el movimiento de uno afecta la posición del siguiente, permitiendo mayores alcances en el efector final y por consiguiente la generación de un espacio de trabajo mayor que la de un paralelo construido con el mismo tamaño en los eslabones.

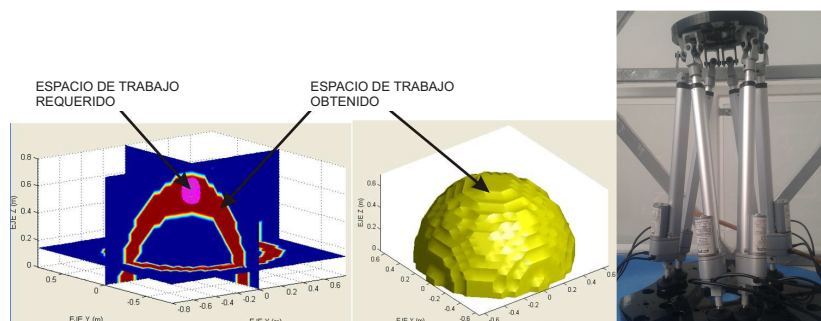


Figura 3.5: Espacio de trabajo Stewart Gough[21]

El espacio de trabajo también se encuentra determinado por el número de grados de libertad, por ejemplo el espacio de trabajo de un robot tipo SCARA (Selective Compliance Articulated Robot Arm)

obtiene la forma de un corazón más una proyección vertical como se muestra en la figura 3.6(a); este robot de tipo serial posee 3 articulaciones rotativas y 1 prismática. Por último, el robot de la figura 3.6(b) es de tipo serial articulado, cuenta con 6 actuadores rotativos que le permite tener 6 GDL. El espacio de trabajo de este robot posee la forma de la figura 3.6(b) donde se observa que el mayor alcance se da cuando el brazo del robot se encuentra en forma vertical.

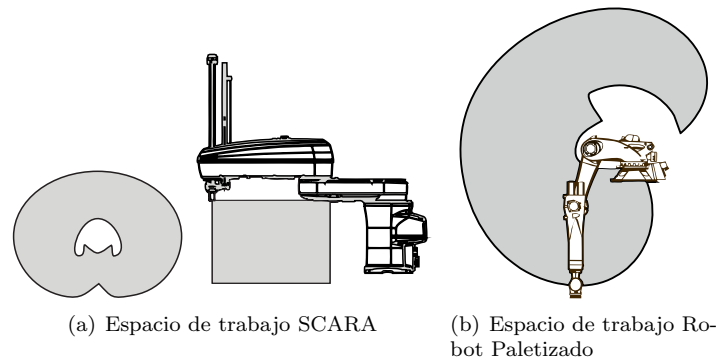


Figura 3.6: Ejemplos de espacios de trabajo [16]

Al citar el modelo de construcción del robot industrial, un robot de tipo articular genera un espacio de trabajo delimitado por superficies curvas, tal como ocurre con el espacio de trabajo del Robot Motoman-MH6 indicado en la figura 3.7. En esta figura se observa que el fabricante suministra todas las dimensiones y cotas necesarias para determinar el alcance real y espacio de trabajo útil generado por el robot. Por otra parte un robot de tipo prismático genera espacios de trabajo con superficies límites planas, por ejemplo el espacio de un robot de tipo Gantry, el cual cuenta con 3 actuadores prismáticos que generan un cubo trapezoidal de espacio de trabajo.

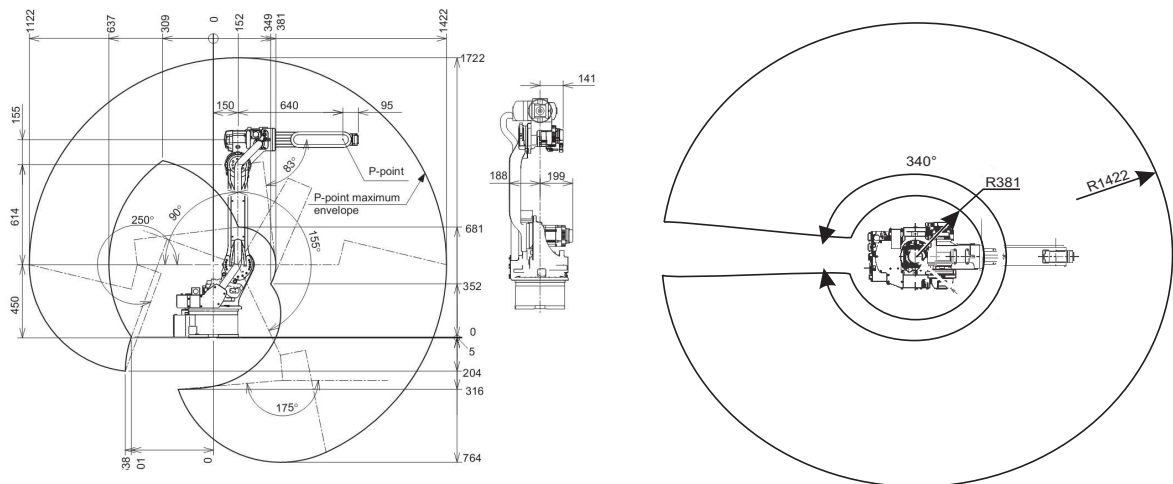


Figura 3.7: Espacio de trabajo Motoman-MH6 [18]

Índice de destreza

Después de determinar el espacio de trabajo, otro factor importante que marca la diferencia a la hora de seleccionar un robot industrial es el consumo energético para recorrer el espacio de trabajo. Una forma de obtener una relación del consumo energético y el espacio de trabajo es conociendo el

índice de destreza del robot. El índice de destreza de un robot se puede definir como la influencia de los errores producidos en el movimiento de las articulaciones sobre los errores de posición producidos en el efector final [9].

Una de las ventajas de conocer el índice de destreza se constata al momento de evaluar los consumos energéticos del robot, en donde se evidencia que si el índice de destreza es menor se necesitan fuerzas mayores para realizar los mismos movimientos en zonas donde la destreza es mayor. Así, cuando el índice de destreza se acerca a cero, la fuerza que los actuadores tendrán que ejercer se acercará al infinito. Al desarrollar la ecuación 3.2 propuesta por Tsai [26] la cual define el índice de destreza de un robot, si el denominador tiende al infinito la ecuación se acerca a cero; es decir, que el determinante del Jacobiano es cercano a infinito o que la matriz jacobiana perdió rango; lo que implica que el robot se esté aproximando a un punto de singularidad.

$$I_d = \frac{1}{\text{cond}(J)} \quad (3.2)$$

Donde la ecuación 3.2 el $\text{cond}(J) = \|J\| \|J^{-1}\|$ es conocida como el condicional de la matriz jacobiana [21]. El índice de destreza varía entre 0 y 1, los valores cercanos a 1 representan una mejor destreza y los que se encuentran cercanos a cero indican una menor destreza, lo anterior en la práctica evidencia que el manipulador se está acercando a una singularidad.

Una singularidad se puede definir como los puntos en el espacio de trabajo donde el manipulador requiere de grandes cantidades de energía para alcanzarlos o la imposibilidad de moverse en ciertas direcciones u orientaciones[25], lo cual, se refleja en la solución de las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento del robot, las cuales podrían tener infinitas soluciones en ciertas posiciones.

3.3 Carga del robot

La capacidad de carga de un robot industrial se define como el peso que puede soportar el robot en su efector final con sus diferentes configuraciones de posiciones. De acuerdo con la aplicación que el robot realice es necesaria la selección de una cierta capacidad de carga. Para realizar esta selección se requiere tener en cuenta criterios como la velocidad de manipulación de la carga, además de la forma geométrica de la misma, esto debido a que la geometría generará momentos de inercia que deberán ser compensados por el robot. Existen dos tipos de cargas asociadas al robot que son la carga útil y la carga total. La carga útil se define como el peso de manipulación; es decir, la pieza a ser transportada o la herramienta a utilizar. La carga total es especificada por el fabricante como la suma de la carga útil más la del efector final del robot. Cuando el robot no realiza tareas de transporte como por ejemplo la tarea de soldadura, ambas cargas útil y total son iguales.

Es muy importante diferenciar estos dos conceptos, dado que al seleccionar el robot solo con la carga útil y no tener en cuenta la carga total da lugar a una sobrecarga en el robot.

Una inadecuada selección de la carga para el robot; es decir, cargas que estén por fuera de los respectivos *diagramas de carga*, pueden llegar a generar daños en elementos del robot tales como:

- Motores
- Estructura mecánica
- Cajas reductoras

En la figura 3.8 se observa a manera de ejemplo un diagrama de carga para un robot IRB 1400 de ABB, en donde se indica que entre mayor sea la altura del centro de gravedad de la pieza o herramienta

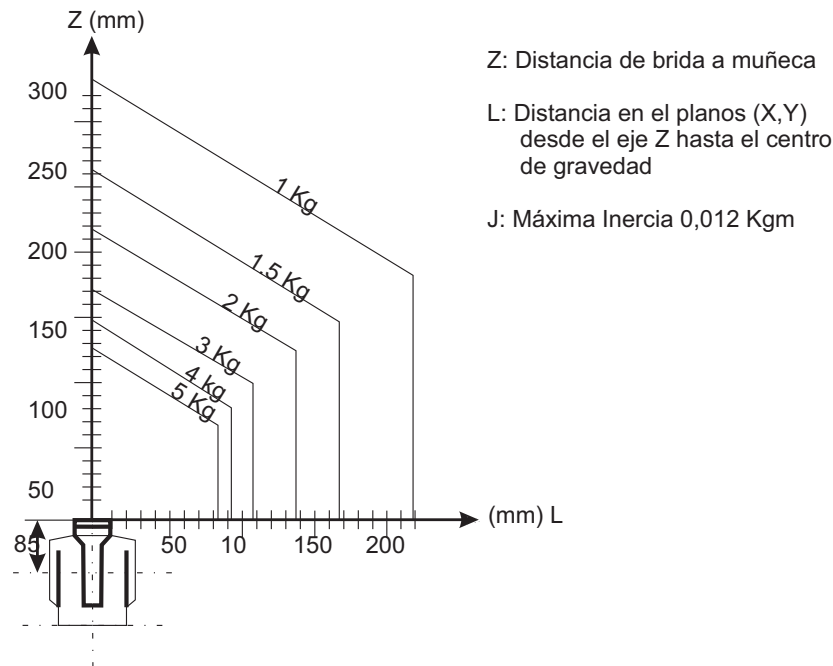


Figura 3.8: Peso máximo permitido para una herramienta montada sobre brida de montaje en distintas posiciones (Centro de gravedad)[1]

(eje Z) con relación a la base del robot o mayor sea su distanciamiento en el plano X, Y (eje L), menor será la carga total que podrá manipular.

En la actualidad los valores de la capacidad de carga de un robot industrial pueden estar típicamente entre 5 y 1200 Kg, entre mayor sea su carga, mayor será el costo del robot. Su tamaño se incrementa tanto mecánicamente como en la potencia requerida en los actuadores, y la energía eléctrica requerida para el funcionamiento será superior a las de un robot con el mismo espacio de trabajo.

3.4 Repetitividad y Resolución

Una de las posibles ventajas que poseen los sistemas robóticos frente a otras máquinas para la automatización industrial es el grado de flexibilidad y adaptabilidad que manejan, además de los bajos niveles de error en el posicionamiento. El error de posicionamiento se asocia con aspectos como la repetitividad y la resolución.

Cuando se consultan los catálogos de los fabricantes de robots industriales se encuentra que los datos suministrados son la repetitividad y en algunos casos la resolución de las juntas. Estos dos criterios son considerados los más relevantes al realizar la búsqueda y selección de un robot industrial.

La repetitividad está asociada a la precisión del robot, es la capacidad de la máquina para llegar a una misma posición varias veces con una carga útil y a una temperatura constante especificada por el fabricante[4].

La resolución se asocia a la mínima medida que posee un sensor o al mínimo movimiento de un actuador del sistema robótico, además la resolución también está asociada a la capacidad de los convertidores Análogo / Digital y Digital/Análogo y a la unidad de procesamiento CPU. Barrientos [4] define la resolución como el “Mínimo incremento que puede aceptar la unidad de control”.

En la figura 3.9 se observan aspectos relacionados con la repetitividad y resolución, en donde la repetitividad es representada por el círculo del lado derecho, su centro está a una distancia que denota

precisión y la resolución es el mínimo paso que puede llegar a moverse el robot. El círculo del lado izquierdo representa la resolución.

Los errores en la precisión se pueden presentar en los cálculos matemáticos generados en los análisis geométricos del robot, estos aparecen cuando el robot se está acercando a puntos de singularidad, como consecuencia de las aproximaciones de las cifras en las operaciones con lo cual se presenta una acumulación del error. Por otra parte el espacio de trabajo también influye en que los errores aumenten proporcionalmente con el tamaño del mismo. Otros aspectos que influyen en este tema son el acople mecánico, la dilatación térmica y los errores humanos por ejemplo, a nivel de programación.

Además de evaluar las variables de precisión y repetitividad, es necesario contemplar la velocidad de actuación para el robot. Una forma de evaluar este criterio es recorrer una trayectoria con su máxima carga sin perder sus características de precisión y repetitividad. Este factor de velocidad también es importante al momento de seleccionar el robot, dado que una de las principales razones para adquirir un sistema robotizado es el incremento en los niveles de producción.

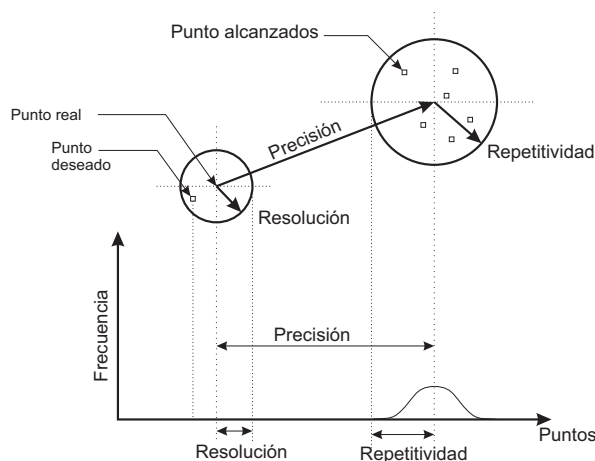


Figura 3.9: Resolución y repetitividad.[4]

Al considerar varios de estos criterios aglomerados por actividades es posible desarrollar una nueva subsección dedicada a los sectores de aplicación en los robots industriales.

3.5 Sectores de aplicación para robots industriales

Existen múltiples tareas o aplicaciones que pueden ser realizadas por los sistemas robóticos, las áreas en las cuales la robótica ha incursionado de manera más predominante según la Federación Internacional de Robótica (IFR) por sus siglas en inglés. Son:

- Salud
- Militar
- Industria
- Entretenimiento

Los robots industriales poseen tantas aplicaciones como sectores económicos con producción industrial. Cabe resaltar que en ciertos sectores se evidencia una inclusión más fuerte que en otros, un ejemplo de esto es el sector automotriz que es considerado el mayor consumidor de sistemas robóticos en el mundo, por otra parte también se encuentran la industria de alimentos, aeroespacial, construcción, minería, manufactura, electrónica y producción de semiconductores[14].

En cuanto a los robots industriales estos poseen una amplia gama de usos, pero las actividades más representativas según la IFR [14] en las que actualmente se desempeñan son manipulación de piezas, soldadura, ensamble, dosificación y procesos. Estos elementos se abordarán a continuación.

- **Manipulación de la pieza**

En la manipulación de piezas existe una familia de robots industriales fabricados especialmente para la tarea de paletizado. Esta tarea consiste en transportar en un palé una cantidad de material y disponerlo en su lugar de almacenaje. . La principal característica es la velocidad de trabajo y la selección de productos no aprobados sin parar la línea de producción. Es muy común que en el sector de alimentos y medicamentos se realicen actividades de manipulación.

En relación a las características del robot en manipulación se dice que se necesitan entre 4 y 6 grados de libertad. Su espacio de trabajo dependerá propiamente de lo que se pretende manipular y a donde se transportará, la repetitividad no tiene que ser tan exigente como en otras aplicaciones. La carga que el robot deberá soportar dependerá de lo que se pretende manipular y del efector final (Gripper), la cual esta típicamente entre 1 y 1200 Kg.

- **Soldadura**

En los robots utilizados en tareas de soldadura se hace indispensable que este posea 6 grados de libertad ya que esta tarea necesita de gran destreza, llegando inclusive a los 7gdl cuando se requiere adicionalmente desplazamientos del robot. Actualmente en la industria automotriz esta es una de las tareas principales de los robots instalados en las plantas, en tanto estos puedan reproducir el proceso de soldado en repetidas ocasiones teniendo una mínima variación en la tarea y asegurando así que las carrocerías cumplirán con los requisitos de seguridad de la misma forma en todas sus unidades. Un ejemplo es la soldadura de punto, este tipo de soldadura posee una herramienta con una geometría particular, como se puede ver en la figura 3.10, generando que el robot requiera una mayor destreza, una tarea de programación más exhaustiva y la utilización más adecuada del espacio de trabajo. Existen otros tipos de soldaduras como la de arco y la MIG, estas poseen el inconveniente que la soldadura se realiza con material de aporte; es decir, hay un consumo de material que el robot deberá mantener para realizar su tarea. Por lo general este consumo se carga al robot y así se eleva la carga que deberá soportar.



Figura 3.10: Herramienta de robot industrial para realizar soldadura de punto.[12]

En relación a las características del robot industrial para realizar la actividad de soldadura se concluye que el espacio de trabajo no es representativo. Los grados de libertad necesarios se encuentran entre 5 y 6 para lograr las destrezas en el espacio de trabajo necesarias y así alcanzar los puntos de manera adecuada. La carga del robot dependerá del sistema de soldadura que utilice, pero estas cargas oscilan típicamente entre 5 y 30 Kg. La repetitividad en los procesos de soldadura no es de gran exigencia pero debe ser lo suficientemente pequeña como para asegurar cada punto o cordón de soldadura.

- **Ensamble**

La tarea de ensamble en un robot industrial se ilustra con ejemplos como: ajuste de tornillos para motores de combustión, el desmolde de piezas de plástico o metales en fundición, la instalación de los vidrios panorámicos en vehículos, entre otros. La tarea de ensamble puede generar en sí misma un reto mayor en el sistema de control en comparación con la configuración del manipulador. Esto se debe a que al realizar la tarea de ensamble el robot en algún momento requiere entrar en contacto con el ambiente, si no se posee un ambiente con todas las variables controladas es posible que este cambie con el tiempo. Al modificarse el ambiente el robot debe asimilar estos cambios que generan un inconveniente a la hora de ensamblar las piezas. Una forma de resolver esta dificultad es generar un tipo de control de fuerzas, técnica que requiere una realimentación de fuerzas del robot y por tal motivo se hace necesario el uso de sensores de fuerza.

Una de las características de un robot industrial para la tarea de ensamble se asocia al espacio de trabajo, este limitará el área donde se debe realizar el ensamble. Los grados de libertad del robot típicamente se encuentran desde 4 hasta 6 grados de libertad, un ejemplo de 4 GDL es el robot tipo SCARA, el cual es utilizado para realizar el ensamble de circuitos electrónicos o el ensamble de un buje dentro de un motor de combustión. La carga que el robot puede soportar dependerá de la pieza de ensamble, esta alcanza un peso usualmente entre 1 hasta 50 Kg. El principal criterio para la selección de un robot para la actividad de ensamble es la repetitividad y la resolución, este es el factor principal al momento de considerar el acople de piezas. Estos valores oscilarán típicamente entre $\pm 0,01mm$ y $\pm 0,08mm$ según especificaciones reportadas por los fabricantes.

- **Dosificación**

La dosificación es un proceso en el cual se aplican resinas, pegantes, pinturas y selladores. Esta tarea requiere una mayor exigencia en la planificación de las trayectorias que el robot debe seguir, el sistema copia la forma de las piezas en donde se va a aplicar el pegante o sellador. En lo referente al sistema de control en casos como la aplicación de pinturas, se pueden utilizar técnicas avanzadas como el aprendizaje por imitación, ya que en la mayoría de los casos se utiliza un experto para enseñarle la trayectoria más adecuada al robot según sea la zona a pintar. El proceso de dosificación de pintura es una de las tareas realizadas por robot que guarda mayor semejanza con las tareas desarrolladas por humanos. Para la implementación de esta tarea se encuentran incluidas variables como la velocidad, la posición, la orientación, la cercanía a la pieza, la presión de dosificación de la pintura y la corrección de espesores.

Las características de un robot industrial para el proceso de dosificación se basan principalmente en los grados de libertad, estos se deben encontrar entre 5 y 6 dado que se requiere una alta libertad de movimiento debido a la similitud de esta actividad con las realizadas por las personas. El espacio de trabajo usualmente es amplio, mientras que el alcance para realizar la tarea de pintura es por lo general en grandes superficies, la carga que debe soportar estará típicamente entre 1 y 10 Kg y la repetitividad debe ser aceptable para el proceso.

- **Procesos**

En este ítem se pueden enmarcar el resto de las actividades que son realizadas por los robots industriales tales como: el corte, pulido, transporte y asistencia.

Cada proceso requiere de diferentes características que dependen de cada problema particular asociado al tipo de actividad, como caso de ejemplo se analizará el proceso de pulido de superficies. Este proceso cuenta con una característica particular y es la fuerza que debe realizar el robot sobre la superficie para generar el acabado necesario. Este proceso es llevado a cabo con la ayuda de un sensor de fuerza ubicado en la muñeca del robot, con el sensor y el control apropiado se podrá asegurar una fuerza de contacto constante sobre la superficie a pulir y así lograr el acabado deseado.

Las características son propias de cada proceso que se realice, por tal motivo se debe hacer una evaluación de cada tarea y considerar simultáneamente diferentes criterios como los presentados en la sección anterior.

A continuación se considera un caso de uso aplicado en el que se pretende seleccionar el robot de corte de rebaba que será motivo de estudio en el resto del documento.

3.6 Caso de uso aplicado

Dentro de los procesos de manufactura existen diferentes tareas para realizar el acabado de superficies, una de estas actividades es el corte de material sobrante (rebaba). Esta tarea se ejecuta típicamente de forma manual, donde un operador experto en el proceso de corte de rebaba realiza su remoción. Para el desarrollo de esta actividad se utilizan diferentes tipos de herramientas como son: cuchillas, corte láser o corte por abrasión mediante herramientas rotativas. Para el caso de estudio visto en esta sección se efectúa el corte de rebaba en sillas plásticas con una cuchilla como herramienta. Esta tarea de corte es común encontrarla en los procesos de extrusión-soplado como el caso de la fabricación de sillas plásticas, en donde un operario dotado de una gran destreza y con la ayuda de una cuchilla logra extraer el material sobrante, además de un acabado que cumple con el estándar exigido.

El problema de corte de rebaba involucra características propias de los seres humanos como lo son el reconocimiento visual, la palpación, la destreza de manipulación de la herramienta y la fuerza aplicada sobre la pieza. Las sillas para el transporte urbano de pasajeros se realizan por medio del proceso de extrusión-soplado, por la forma de la silla se generan residuos plásticos como se observa en la figura 3.11, esta rebaba debe ser retirada y dar un acabado que cumpla con el estándar de producción.



Figura 3.11: Silla plástica con rebaba

Para remover la rebaba es necesario poseer destreza y versatilidad en el movimiento, esto debido a la cantidad de curvas existentes y la inclinación de ataque de la herramienta en la superficie. Se requiere de excelentes acabados de tal forma que no deben existir superficies irregulares o filosas, ya que ciertas partes de la silla serán manipuladas por el usuario final, tampoco el corte debe ser profundo dado que esto arruinaría la estética del producto y no cumpliría con los estándares de la empresa generando un rechazo del mismo.

En la figura 3.12 se encuentra un plano detallado de la geometría de una silla usada en el transporte de pasajeros, en donde los 3 agujeros ubicados dentro de la silla son las agarraderas y la línea exterior es la línea de acabado de la silla. Al analizar las dimensiones de la silla se deduce que el volumen de

trabajo se toma como un paralelepípedo de tamaño $700 \times 550 \times 200 \text{ mm}$. Por medio de la medición del peso de varias sillas con rebaba se toma como valor promedio 6 Kg .

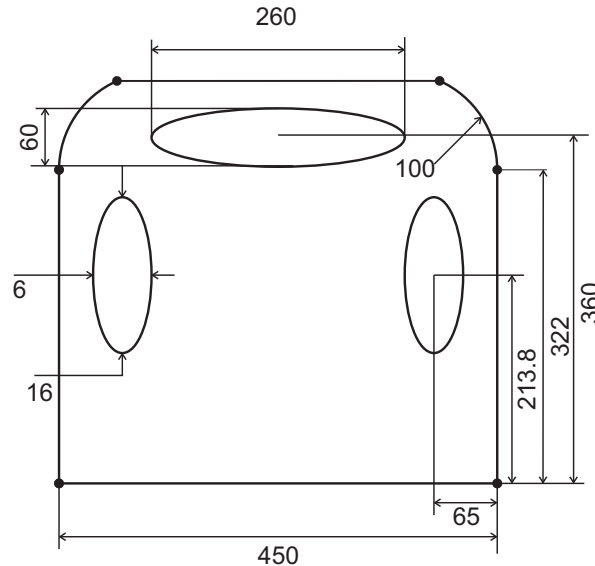


Figura 3.12: Dimensiones del espaldar de la silla

Para llevar a cabo la selección de un robot industrial que realice la tarea de corte de rebaba, se debe ejecutar un análisis de los datos obtenidos para cumplir con los requerimientos de la tarea de corte.

El primer aspecto a evaluar es el espacio de trabajo, este se encuentra limitado a cumplir movimientos dentro de un paralelepípedo de $700 \times 550 \times 200 \text{ mm}$. Como segundo aspecto se evalúan los grados de libertad que debe poseer el robot para alcanzar las posiciones en el espacio de trabajo.

El corte de la rebaba se ejecuta a lo largo de una superficie plana en donde es necesario desplazar la herramienta de corte en diferentes planos y como consecuencia del análisis previo se requieren 3 GDL. Como el corte de la rebaba se realiza con una chuchilla esta deberá adoptar una posición perpendicular con la trayectoria, lo cual indica que es requerido otro grado de libertad para cumplir con un mínimo 4 GDL.

A continuación se analiza la carga del robot, para esto es necesario tener en cuenta la tecnología de remoción de la rebaba utilizada en el proceso. Para este caso de estudio se utilizará un gripper de sujeción con una cuchilla como se muestra en la figura 3.13, el peso de este elemento es de 1 Kg aproximadamente, pero además del peso del gripper se debe tener presente que para llevar a cabo la tarea de corte se ejercerá una fuerza que debe ser superada para realizar el mismo. Esta fuerza se asume como una carga adicional que el robot debe mover, por tal motivo la carga útil del robot se estima en aproximadamente de 3 kg , con lo cual la carga real del robot después de obtener la útil es de 4 kg .

La repetitividad y la resolución en esta tarea están determinadas por las dimensiones de la silla y su relación con el tamaño de la rebaba. Teniendo en cuenta los estándares de calidad de acabado de superficie de la silla se tiene como tamaño mínimo de la rebaba de $0,2 \text{ mm}$, lo cual genera como resultado que la repetitividad deba ser menor a este valor, la resolución la mitad $0,05 \text{ mm}$ y la precisión de $0,1 \text{ mm}$.

El tipo de aplicación de esta tarea es un proceso de corte y remoción, esta clase de proceso cumple con los requerimientos descritos en la sección de tipos de aplicación.

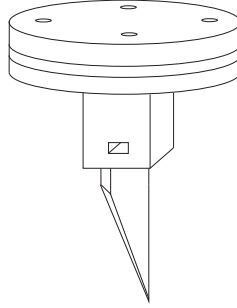


Figura 3.13: Gripper con cuchilla de corte

En la tabla 3.1 se resumen los criterios descritos en este artículo para el caso de aplicación considerado de corte de rebaba en sillas plásticas.

Tabla 3.1: Criterios de entrada

Criterios	Valor
Espacio de trabajo	de $700 \times 550 \times 200 \text{ mm}$
Grados de Libertad (GDL)	4
Capacidad de carga	4 <i>Kg</i>
Precisión y repetitividad	0.1 % 0.05 mm
Aplicación	Procesos (Corte)

Después de poseer todos los parámetros necesarios discriminados, se lleva a cabo una búsqueda con algunos de los principales fabricantes de robots industriales en el mundo como son Kuka[16], Motoman[18], ABB [2], Adept[3], Fanuc[8], Mitsubishi[17], DENSO y Staübli[24]. De cada uno de estos fabricantes se extrajeron algunos modelos de robots los cuales se reportan con sus características en la tabla 3.2.

Tabla 3.2: Robots Industriales

Fabricante	Modelo	GDL	Alcance mm	Carga máxima kg	Repetitividad mm
KUKA	KR 180-2CR	6	2700	180	$\pm 0,12$
KUKA	KR 10 R600	4	600	10	$\pm 0,01$
DENSO	HM-40704G	4	700	10	$\pm 0,02$
MOTOMAN	HP 20D-6	6	3459	6	$\pm 0,06$
MOTOMAN	HP 350-200	6	3036	200	$\pm 0,5$
ABB	IRB 2400L-10	6	1550	12	$\pm 0,03$
ABB	IRB 580-12	6	2558	10	$\pm 0,3$
ADEPT	IRB 340	4	1130	1,2	$\pm 0,1$
ADEPT	Three XL	4	1067	25	$\pm 0,038$
FANUC	M-10iA/6L	6	860	6	$\pm 0,05$
MITSUBISHI	RH-12SDH7035	4	3255	250	$\pm 0,5$
STAÜBLI	RX160	6	2010	34	$\pm 0,05$
STAÜBLI	RS40B	4	400	2	$\pm 0,01$

El siguiente paso es definir entre los diferentes fabricantes cuales robots cumplen con los requerimientos de la tabla 3.1. Al analizar la tabla 3.2 donde se resumen algunos modelos y marcas de robots

con diferentes configuraciones, se realiza una selección preliminar con los criterios: grados de libertad, espacio de trabajo, carga máxima y repetitividad, obteniendo como resultado los siguientes robots.

- three XL
- HM-40704G

Teniendo en cuenta que un robot que posea más de 4 grados de libertad cumple con los estándares requeridos, para el análisis del caso de estudio se presenta la tabla 3.2, en donde se relacionan varios modelos con 6 GDL de tipo articular y los robots que se encuentran en el límite del grados, los cuales son de tipo SCARA. Para decidir entre estos dos modelos se toma en cuenta el criterio sobre la evaluación de las características versus el costo, el costo de estos robots está ligado proporcionalmente al número de grados de libertad. Con esta precisión se puede concluir que para llevar a cabo la selección, el tipo de robot que cumple con las características al límite son los de arquitectura SCARA.

Después de realizar una preselección de los robots que cumplen con las mínimas características para la solución del problema corte de rebaba, es necesario evaluar cuál de estos es la mejor opción. Para realizar esta selección se tiene en cuenta el último criterio estudiado en la sección anterior, en donde este ejemplo se encuentra enmarcado en la sección de procesos. Al conocer que los procesos poseen características particulares, para este caso se consultó una persona experta en el proceso de corte de rebaba con el fin de asignar una ponderación a cada criterio.

A esta persona se le realiza una presentación de los diferentes criterios tratados en el artículo y se le solicita que a través de su experticia le asigne un valor porcentual a cada uno de los criterios. Como resultado la valoración de los criterios queda de la siguiente forma:

- Espacio de trabajo: 20 %
- Grados de libertad: 20 %
- Carga máxima: 20 %
- Repetitividad: 40 %

En donde se aprecia que la repetitividad toma un valor superior a los demás criterios, esto debido a que la característica del acabado superficial del producto toma un papel fundamental en el rechazo o aceptación del mismo.

Tabla 3.3: Ponderación criterios de proceso corte

Robot	Espacio de trabajo <i>mm</i> 20 %	Grados de libertad 20 %	Carga máxima 20 %	Repetitividad 40 %	Porcentaje % OK
Three XL	1067	4	25	0.038	76
HM-40704G	700	4	10	0.02	81.1

Con lo anterior la arquitectura que ofrece una solución adecuada es la de tipo SCARA, y dentro de estos los que cumplen las características del problema son los modelos Adept Three XL y el DENSO HM-40704G. Siendo este último el que obtuvo el mayor porcentaje de aceptación según la tabla 3.3:

Para el desarrollo de los siguientes capítulos se estudia en detalle las características del Robot SCARA HM-40704G de la marca DENSO, donde se concluye que los criterios como espacio de trabajo, grados de libertad, carga útil, precisión, repetitividad, resolución y aplicación, son los principales factores de decisión al adquirir un robot industrial, sin dejar de lado que es necesario tener claridad sobre cuál es el tipo de aplicación para la cual se utilizará el robot.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL ROBOT SCARA

El propósito de este capítulo es conocer el modelo cinemático y dinámico del robot SCARA, con el fin de obtener un modelo donde se implementaran las leyes de control de fuerza. Para lograr lo anterior se estudian y se desarrollan las ecuaciones de la dinámica del robot SCARA, para obtener la dinámica se utiliza el método de Euler-Lagrange, el cual está basado en el balance de la energía cinética y la potencial. En la primera sección se presenta el análisis de la cinemática directa del robot SCARA, para lo cual se utiliza el método de Denavit-Hartenberg como herramienta matemática en la elaboración de la cinemática directa, además de describir la geometría de cada uno de los eslabones del robot y la asignación de marcos de referencia. En la segunda sección se explica la cinemática inversa del robot SCARA y se utiliza el método geométrico para encontrar la forma cerrada de la solución. En la tercera sección se estudia la cinemática diferencial en donde se describe el Jacobiano geométrico del robot. Por último se utilizan los resultados obtenidos a través del capítulo para desarrollar en la cuarta sección la dinámica del robot, la cual se obtiene por medio de los modelos energéticos como son la energía cinética y la energía potencial.

4.1 Desarrollo de la cinemática directa para el robot SCARA.

En el capítulo 3 se seleccionó el robot de marca DENSO referencia HM-40704G como el modelo idóneo de acuerdo con los requerimientos establecidos. Este robot está construido con una arquitectura tipo SCARA, y dentro de las características más relevantes para la tarea de corte se encuentra el espacio de trabajo, el cual es alcanzado de manera satisfactoria por este robot. El robot SCARA está conformado por 1 base y 4 eslabones, 3 de tipo articular y 1 prismático, cada uno de estos eslabones es representado por medio de los parámetros Denavit-Hartenberg (D-H) que al ser desarrollados hacen posible obtener la cinemática directa del robot. Para conocer los parámetros D-H se realiza una separación de cada eslabón del robot tomando las medidas correspondientes a cada uno de los parámetros. Con el fin de identificar las medidas de estos eslabones se utiliza el modelo CAD del robot, el cual se maneja a través de un formato “Paraboloide” obtenido de la página web del fabricante; con la ayuda de un software de lectura de archivos CAD como es “Solid Edges V. Estudiantil” se realiza la medición entre los ejes de rotación y la traslación de los mismos. A continuación se presenta la descripción de cada uno de los eslabones.

Eslabón 0:

En la figura 4.1 se observa la base del robot SCARA y la distancia entre el suelo y el eje del siguiente eslabón.

Eslabón 1:

El eslabón 1 es el primer brazo articulado del Robot SCARA. Este eslabón posee una articulación rotacional y como se observa en la figura 4.2 el eje z es el eje de rotación de la articulación y el eje x está en la dirección que apunta al eje z del siguiente eslabón

Eslabón 2:

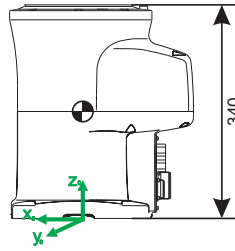


Figura 4.1: Base del robot SCARA

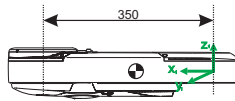


Figura 4.2: Brazo 1 del Robot SCARA

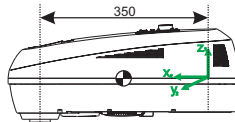


Figura 4.3: Brazo 2 del Robot SCARA

El eslabón 2 es el segundo brazo articulado del robot, posee una articulación rotacional y tiene características geométricas similares al eslabón 1. Como se observa en la figura 4.3 el marco de referencia se encuentra sobre el eje de rotación del eslabón y su longitud es mayor que la del eslabón 1.

Eslabón 3:

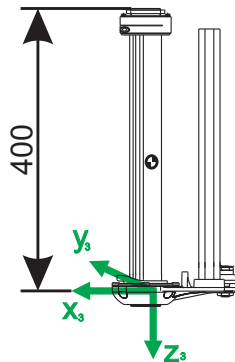


Figura 4.4: Eslabón prismático

El eslabón 3 posee una articulación prismática como se observa en la figura 4.4. Esta articulación le permite alcanzar los puntos en el eje z a una distancia predeterminada, cuyo máximo valor puede representar la distancia del eslabón.

Eslabón 4:

El eslabón 4 es una articulación rotacional adherida al eslabón 3, el cual permite una rotación sobre este eje. Como se observa en la figura 4.5 este eslabón solo comprende el actuador rotacional.

Para obtener los parámetros D-H del robot SCARA se ubican los marcos de referencia como se muestra en la figura 4.6, Allí se observa que los marcos de referencia se encuentran alineados con los

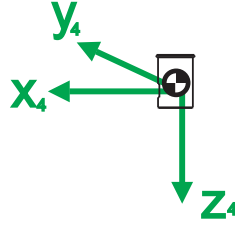


Figura 4.5: Elemento rotacional en el efector final del robot SCARA

centros de gravedad de cada uno de los eslabones del robot. La forma utilizada para esta asignación es la descrita en la figura 2.5.

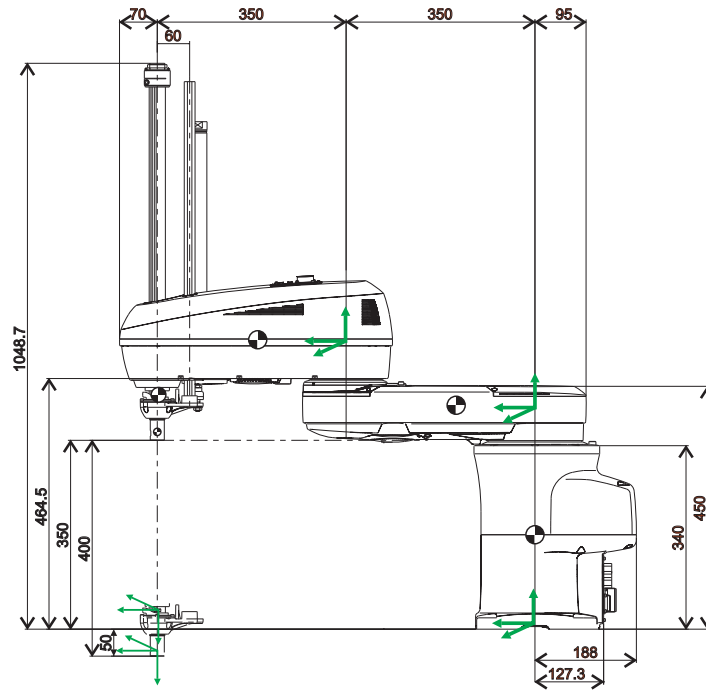


Figura 4.6: Robot SCARA con marcos de referencia D-H y cotas

Al conocer todas las distancias del robot y ángulos de rotación entre los ejes se introduce la tabla 4.1, en donde se muestra los parámetros D-H que posee el robot.

Tabla 4.1: Parámetros D-H robot SCARA

J	α (rad)	θ (rad)	l(m)	d(m)
Eslabón 1	0	q_1	0.35	0.35
Eslabón 2	π	q_2	0.35	0
Eslabón 3	0	0	0	d_3
Eslabón 4	0	q_3	0	0

Al identificar los parámetros D-H es posible conocer la cinemática directa del robot SCARA con la ayuda de la ecuación 4.1, en donde ${}^{i-1}A_i$ representa la matriz homogénea de la posición del marco de referencia i visto desde el marco $i-1$, donde $i = 1, \dots, 4$ corresponde a los 4 marcos de referencia.

$${}^{n-1}A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & l_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & l_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Al reemplazar los parámetros D-H en la ecuación 4.1 se obtiene lo siguiente para cada una de las articulaciones:

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0,35 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0,35 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0,401 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & 0,35 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & 0,35 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0,119 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$${}^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,170 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones 4.2 - 4.5 representan la posición de cada eslabón visto desde el marco de referencia anterior en la cadena. Estas matrices permiten conocer la posición del efector final observada desde el marco de referencia ubicado en la base del robot, al realizar la posmultiplicación de las anteriores matrices se logra como resultado ${}^0A_4 = {}^0A_1 * {}^1A_2 * {}^2A_3 * {}^3A_4$, valores que representan la posición del efector final visto desde la base. Al desarrollar esta ecuación se obtiene:

$${}^0A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_1 + q_2 - q_4) & \sin(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & \underbrace{0,345 (\cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1))}_x \\ \sin(q_1 + q_2 - q_4) & \cos(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & \underbrace{0,345 (\sin(q_1 + q_2) + \sin(q_1))}_y \\ 0 & 0 & -1 & \underbrace{0,345 - d_3}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La matriz homogénea 0A_4 representa la ubicación en el espacio x, y, z y la rotación sobre el eje z del efector final del SCARA. La posición en el eje x es el elemento ${}^0A_4(1, 4)$, en y es el elemento ${}^0A_4(2, 4)$, en el eje z es el elemento ${}^0A_4(3, 4)$, de la matriz homogénea 0A_4 y la información de rotación en la submatriz ${}^0A_4(1 : 3, 1 : 3)$. Para encontrar el valor de la rotación en el eje z se realiza la sumatoria vectorial de la rotación de cada una de las variables de rotación del robot. Como el vector z del último eslabón está en dirección contraria al vector z del marco de referencia de la base, este valor se utiliza de forma negativa, obteniendo para el caso lo siguiente:

$$\theta = q_1 + q_2 - q_4 \quad (4.7)$$

4.2 Desarrollo de la Cinemática Inversa para robot SCARA.

La cinemática inversa del robot SCARA es calculada mediante el análisis geométrico del robot. Las variables independientes de la función cinemática inversa son: $[x, y, z, \theta]$, donde x, y y z son dadas en metros y θ es introducida en radianes.

El primer análisis a realizar es sobre el comportamiento de las primeras 2 articulaciones rotacionales. Al observar el robot en una vista superior se puede determinar que la variables q_1 y q_2 está en función de la posición en x y y . En la figura 4.7 se puede examinar las 2 articulaciones rotacionales sobre el eje z y el marco de referencia del tercer eslabón movilizándose en el plano x, y según el ángulo de las articulaciones.

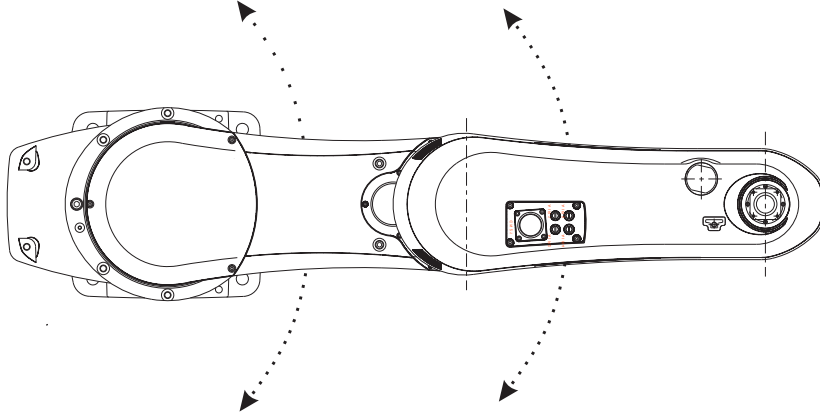


Figura 4.7: Robot SCARA desde vista superior

Teniendo el robot en esta configuración el problema de la cinemática inversa se puede desarrollar como un sistema de 2 grados de libertad. Al analizar detalladamente la figura 4.7 se realiza el mismo desarrollo descrito en la sección 2.3 donde se encuentra el punto $P(x, y)$ por medio del teorema del coseno.

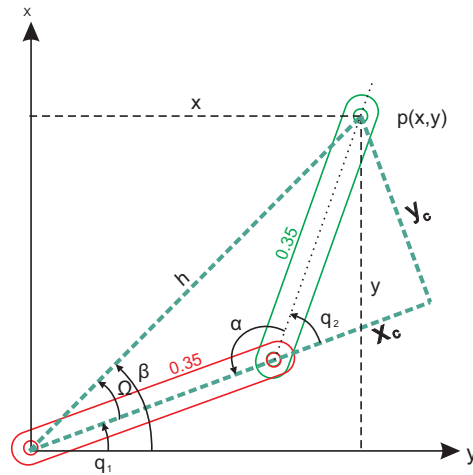


Figura 4.8: Modelo de barras robot SCARA vista superior

Simplificando el modelo del robot a barras como se observa en la figura 4.8 y utilizando el manejo geométrico y matemático, se analizan los triángulos formados por los brazos del robot y h con el fin de encontrar q_2 . Al realizar el desarrollo se obtiene:

$$h^2 = 0,35^2 + 0,35^2 - 2 * 0,35 * 0,35 * \cos(\alpha) \quad (4.8)$$

$$q_2 = \pi - \alpha \quad (4.9)$$

$$h^2 = x^2 + y^2 \quad (4.10)$$

$$x^2 + y^2 = 0,35 + 0,35 - 2 * 0,35 * 0,35 * \cos(\pi - q_2) \quad (4.11)$$

$$D = \frac{x^2 + y^2 - 0,7}{0,245} = \cos(q_2) \quad (4.12)$$

$$D^2 + \sin^2(q_2) = 1 \quad (4.13)$$

$$q_2 = \text{atan2}(\sqrt{1 - D^2}, D) \quad (4.14)$$

Donde el valor de 0.35 *m* es tomado de las longitudes en los brazos del robot.

La ecuación 4.11 representa el teorema del coseno y despejando q_2 se obtiene la ecuación 4.12 en función de \cos^{-1} . Como el sistema está definido en los 4 cuadrantes, con el fin de realizar apropiadamente los cálculos a nivel computacional se utiliza la función *atan2*. Esta función permite encontrar los valores de q_2 en cualquier cuadrante, además al resolver el radicando de la ecuación 4.14 es posible obtener dos posibles soluciones para q_2 , un valor positivo o uno negativo. Estos valores representan las soluciones de la cinemática inversa, donde el valor negativo determina la solución denominada “codo abajo” y el valor positivo la solución denominada “codo arriba”.

Para encontrar q_1 se analiza el triángulo formado por los lados x_c, y_c y h en la figura 4.8, donde se obtiene:

$$q_1 = \beta - \Omega \quad (4.15)$$

$$q_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(0,35 * \sin(q_2), 0,35 + 0,35 * \cos(q_2)) \quad (4.16)$$

La ecuación 4.16 se encuentra en función de q_2 , cuyo resultado puede ser negativo o positivo; de acuerdo con la solución aplicada en la ecuación 4.14 el valor de q_1 se modificará. Las ecuaciones 4.14 y 4.16 representan los valores de q_1 y q_2 que dependerán de los puntos asignados en el espacio (x, y) .

Para el cálculo de la variable d_3 no se requiere realizar previamente el análisis bidimensional. Como el valor de la variable d_3 representa el desplazamiento en la articulación prismática sobre el eje z del marco de referencia de la base, se desarrolla un cálculo directo sobre el valor de la entrada del eje z , en donde se requiere tener en cuenta la orientación de los marcos de referencias y los valores de los desplazamientos (off-set). Al observar la tabla 4.1 de parámetros D-H se determinan los valores de los desplazamientos, siendo estos los valores de la columna d . Al desarrollar el análisis en el eje z se obtiene:

$$d_3 = d_1 + d_2 - d_4 - z \quad (4.17)$$

$$d_3 = 0,35 - z \quad (4.18)$$

El valor de la variable q_4 que representa la rotación del efector final se obtiene por medio de la cinemática directa del robot. Conociendo los valores de q_1, q_2 y θ se despeja el valor de q_4 realizando la suma de los ángulos. El valor de q_4 está dado entonces por la expresión 4.19.

$$q_4 = q_1 + q_2 - \theta \quad (4.19)$$

Las ecuaciones 4.14, 4.16, 4.18 y 4.19 permiten encontrar los valores $[q_1 \ q_2 \ d_3 \ q_4]$ con entradas $[x \ y \ z \ \theta]$ describiendo completamente la cinemática inversa del robot SCARA HM 40704G.

4.3 Desarrollo del Jacobiano para robot SCARA.

El Jacobiano del robot SCARA HM 40704G es de tamaño 6×4 , esto debido a la representación espacial y los 4 grados de libertad del robot. Las articulaciones q_1, q_2 y q_4 son de tipo rotacional y la articulación d_3 de tipo prismática. Al utilizar las ecuaciones 2.56 y 2.55 se forma la matriz del Jacobiano para el robot SCARA. Después de realizar el análisis sobre la ecuación 2.55 se obtienen los elementos de la velocidad lineal en el Jacobiano del robot SCARA mediante la expresión :

$$J_v = \begin{pmatrix} z_1 \times (o_{4c} - o_0) & z_2 \times (o_{4c} - o_1) & z_3 & z_4 \times (o_{4c} - o_3) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Al utilizar la ecuación 2.56 se hallan los elementos del Jacobiano relacionados con la velocidad angular obteniendo,

$$J_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Donde $o_{\{0,1,3\}}$ son los vectores descritos desde el origen del marco de referencia de la base del robot hasta los marcos de referencia D-H $\{0,1,3\}$, la expresión o_{4c} es el vector desde el origen del marco de referencia de la base del robot hasta el centro de gravedad del eslabón 4; estos vectores son mostrados en las ecuaciones 4.22 - 4.26. Este Jacobiano permite conocer la velocidad del efector final vista desde la base.

$$o_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$o_1 = \begin{pmatrix} 0,35 \cos(q_1) \\ 0,35 \sin(q_1) \\ 0,401 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$o_2 = \begin{pmatrix} 0,35 \cos(q_1 + q_2) + 0,35 \cos(q_1) \\ 0,35 \sin(q_1 + q_2) + 0,35 \sin(q_1) \\ 0,52 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$o_3 = \begin{pmatrix} 0,35 \cos(q_1 + q_2) + 0,35 \cos(q_1) \\ 0,35 \sin(q_1 + q_2) + 0,35 \sin(q_1) \\ 0,52 - d_3 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$o_{4c} = \begin{pmatrix} 0,35 \cos(q_1 + q_2) + 0,35 \cos(q_1) \\ 0,35 \sin(q_1 + q_2) + 0,35 \sin(q_1) \\ 0,43 - d_3 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Los vectores direccionales z_i del eje z en los marcos de referencia respecto al origen se plantean de la siguiente forma :

$$z_1 = z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$z_3 = z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.22 -4.28 en la ecuación 4.20 y resolviendo los productos internos se obtiene:

$$J_v = \begin{pmatrix} -0,35 \sin(q_1 + q_2) - 0,35 \sin(q_1) & -0,35 \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0,35 \cos(q_1 + q_2) + 0,35 \cos(q_1) & 0,35 \cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Al unificar las ecuaciones 4.21 y 4.29 se obtiene el Jacobiano geométrico del robot SCARA, el cual se observa en la ecuación 4.30. Este representa la matriz de transformación del efector final visto desde la base del robot.

$$J = \begin{pmatrix} -0,35 \sin(q_1 + q_2) - 0,35 \sin(q_1) & -0,35 \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0,35 \cos(q_1 + q_2) + 0,35 \cos(q_1) & 0,35 \cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Con el análisis de la cinemática directa, la cinemática inversa y análisis de la cinemática diferencial se conoce en su totalidad el análisis estático de robot SCARA, cada uno de estos elementos son indispensables al momento de realizar el análisis dinámico del robot.

4.4 Estudio y desarrollo de la ecuación Euler-Lagrange (Ecuación de movimiento)

En las anteriores secciones se describe el movimiento del robot sin tener en cuenta las fuerzas y los torques producidos en la herramienta. Con las ecuaciones de la dinámica es posible conocer las interacciones entre las fuerzas, torques y el movimiento. Identificar estas variables es de vital importancia al momento de diseñar sistemas de control de movimientos y control de fuerzas para robots.

Para desarrollar la dinámica del robot SCARA se inicia con el estudio de la energía potencial y cinética de cada uno de los eslabones del robot. La ecuación 4.31 hace referencia a la formulación de Lagrange, donde el lagrangiano es igual a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

$$\ell = K - P = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y \quad (4.31)$$

Al derivar la ecuación 4.31 respecto a las variables independientes y y \dot{y} se obtiene:

$$\frac{\partial \ell}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} \quad (4.33)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.32 y 4.33 en la segunda ley de Newton para un cuerpo con energía cinética y potencial se obtiene una expresión de la siguiente forma:

$$m\ddot{y} = f - mg \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \ell}{\partial y} = f \quad (4.35)$$

La ecuación 4.35 es conocida como Euler-Lagrange. Esta ecuación describe la dinámica del movimiento de un sistema con un grado de libertad donde interactúan fuerzas externas e internas. Para implementarlo a sistemas de más de un grado de libertad se utilizan coordenadas generalizadas como

(q_1, \dots, q_n) , donde n indica el número de grados de libertad del sistema. La ecuación generalizada quedará expresada entonces de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \ell}{\partial q_k} = \tau_k; \quad k = 1, \dots, n \quad (4.36)$$

Al desarrollar la ecuación 4.36 se encuentra que la energía cinética posee dos componentes en velocidad, como son, la velocidad lineal y la velocidad angular. Lo anterior se puede observar en la ecuación 4.37

$$K = \frac{1}{2} m I_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T \omega_i \quad (4.37)$$

Donde ω_i es el vector que representa la velocidad angular, I_i el tensor de inercia visto en el centro de gravedad del cuerpo respecto a su propio marco de referencia, v_i es el vector de velocidad lineal y m_i la masa asociada al cuerpo en análisis.

Al expresar la energía potencial de un eslabón se determina que se encuentra en función de la altura respecto a la base del eslabón y la masa asociada del mismo. Expresándolo de forma matemática se obtiene:

$$P = mgy \quad (4.38)$$

Energía Cinética del robot SCARA.

Al desarrollar la energía cinética de un robot con n eslabones, se puede utilizar el Jacobiano para obtener los componentes de la velocidad angular y la velocidad lineal. Utilizando la variable generalizada estas velocidades se expresan como:

$$v_i = J_{v_i}(q) \dot{q} \quad , \quad w_i = J_{w_i}(q) \dot{q} \quad (4.39)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.39 en la ecuación 4.37 se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[\sum_{i=1}^n \{ m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{w_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i^T(q) J_{w_i}(q) \} \right] \dot{q} \quad (4.40)$$

$$(4.41)$$

En una forma compacta puede expresarse como:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (4.42)$$

En donde D es una matriz simétrica definida positiva dado que la energía cinética nunca es negativa y cuyo valor es 0 cuando la velocidad de todos los eslabones es igual a 0. La matriz posee un tamaño de $n \times n$ y se conoce como matriz de inercias. Para encontrar el valor numérico de la energía cinética del robot SCARA es necesario conocer las masas y los momentos de inercias de cada uno de los eslabones. Para obtener estos valores se utilizó el software Delmia V.5R20, el cual en su base de datos relaciona todas las características mecánicas de los robots, y para el caso de estudio se utilizaron las del robot

Tabla 4.2: Matriz de inercias eslabón 1

Eslabón 1	$I_x \text{ Kg} \times m^2$	$I_y \text{ Kg} \times m^2$	$I_z \text{ Kg} \times m^2$	Masa Kg
$I_x \text{ Kg} \times m^2$	0,015	0	0	3,128
$I_y \text{ Kg} \times m^2$	0	0,082	0	
$I_z \text{ Kg} \times m^2$	0	0	0,085	

Tabla 4.3: Matriz de inercias eslabón 2

Eslabón 2	$I_x \text{ Kg} \times m^2$	$I_y \text{ Kg} \times m^2$	$I_z \text{ Kg} \times m^2$	Masa Kg
$I_x \text{ Kg} \times m^2$	0,027	0	0	3,635
$I_y \text{ Kg} \times m^2$	0	0,096	0	
$I_z \text{ Kg} \times m^2$	0	0	0,087	

Tabla 4.4: Matriz de inercias eslabón 3

Eslabón 3	$I_x \text{ Kg} \times m^2$	$I_y \text{ Kg} \times m^2$	$I_z \text{ Kg} \times m^2$	Masa Kg
$I_x \text{ Kg} \times m^2$	0,077	0	0,002	1,745
$I_y \text{ Kg} \times m^2$	0	0,078	0	
$I_z \text{ Kg} \times m^2$	-0,002	0	0,002	

DENSO HM 40704G. En las tablas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se observa el tensor de inercia asociado al centro de gravedad de los eslabones y la masa asociada a cada uno de los mismos.

En la ecuación 4.41 la parte de $R_i(q)I_iR_i^T(q)$ indica que el tensor de inercia debe estar alineado con el marco de referencia de la base del robot, con el fin de alcanzar lo anterior se utiliza la matriz de rotación sobre el eje z . En las ecuaciones 4.43 - 4.46 se observa cómo cambian estos valores debido a la variable independiente q . Al reemplazar los valores de las tablas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 y las ecuaciones 4.21 y 4.29, en la ecuación 4.41, se obtiene la parte D de la ecuación 4.47.

$${}^0I_1 = \begin{pmatrix} 0,015 \cos(q_1)^2 + 0,082 \sin(q_1)^2 & -0,067 \cos(q_1) \sin(q_1) & 0 \\ -0,067 \cos(q_1) \sin(q_1) & 0,082 \cos(q_1)^2 + 0,015 \sin(q_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,085 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$${}^0I_2 = \begin{pmatrix} 0,027 \cos(q_1 + q_2)^2 + 0,096 \sin(q_1 + q_2)^2 & -0,069 \cos(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2) & 0 \\ -0,069 \cos(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2) & 0,096 \cos(q_1 + q_2)^2 + 0,027 \sin(q_1 + q_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,087 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$${}^0I_3 = \begin{pmatrix} 0,077 \cos(q_1 + q_2)^2 + 0,078 \sin(q_1 + q_2)^2 & -0,001 \cos(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2) & -0,002 \cos(q_1 + q_2) \\ -0,001 \cos(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2) & 0,078 \cos(q_1 + q_2)^2 + 0,077 \sin(q_1 + q_2)^2 & -0,002 \sin(q_1 + q_2) \\ -0,002 \cos(q_1 + q_2) & -0,002 \sin(q_1 + q_2) & 0,002 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$${}^0I_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Al desarrollar la ecuación 4.47, se obtiene la ecuación 4.48 la cual representa la energía cinética total del robot.

$$D = \begin{pmatrix} 0,8733 \cos(q_2) + 1,259 & 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0 & -0,001 \\ 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0,4154 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 1,799 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,873 \cos(q_2) + 1,267 & 0,437 \cos(q_2) + 0,415 & 0 & -0,001 \\ 0,437 \cos(q_2) + 0,415 & 0,415 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 1,799 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Tabla 4.5: Matriz de inercias eslabón 4

Eslabón 4	$I_x \text{ Kg} \times m^2$	$I_y \text{ Kg} \times m^2$	$I_z \text{ Kg} \times m^2$	Masa Kg
$I_x \text{ Kg} \times m^2$	0.01	0	0	0,054
$I_y \text{ Kg} \times m^2$	0	0.01	0	
$I_z \text{ Kg} \times m^2$	0	0	0.01	

Energía Potencial del robot SCARA.

La energía potencial de un cuerpo rígido está asociada con la gravedad a la cual está sometido el cuerpo. Al realizar un análisis multicuerpo se puede aproximar la masa de cada cuerpo como la concentración de la masa en un punto del cuerpo, conocido como el centro de masa. Al extender la ecuación 4.38 a un sistema multicuerpo se obtiene:

$$P_i = \sum_i^n m_i g^T d_c i \quad (4.49)$$

Al aplicar la ecuación 4.49 al robot SCARA, se observa que los centros de masas de los eslabones 1 y 2 no cambian sus alturas respecto a sus marcos de referencias; es decir, sus energías potenciales son constantes. Contrario a lo que pasa con los eslabones 3 y 4 donde la altura de los centros de masas cambia a medida que se desplazan. Al desarrollar las expresiones de la energía potencial de cada eslabón se obtiene,

$$P_1 = 12,292J \quad (4.50)$$

$$P_2 = 18,524J \quad (4.51)$$

$$P_3 = 8,893 - 17,101 d_3 J \quad (4.52)$$

$$P_4 = 0,230 - 0,529 d_3 J \quad (4.53)$$

Al sumar la energía potencial de cada eslabón del robot se calcula la energía potencial total del robot como se observa en la ecuación 4.54.

$$\begin{aligned} P_{total} &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ &= 39,939 - 17,63 d_3 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dinámica del robot SCARA.

Para el desarrollo de la dinámica del robot SCARA se retoma la ecuación 4.31 donde la parte de la energía cinética se puede expresar como los elementos en su forma matricial de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} \omega^T I \omega \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.55)$$

Los elementos de la matriz simétrica positiva D son definidos como $d_{i,j}$ y la energía potencial es definida como $P = P(q)$, la cual no depende de la variable \dot{q} .

Al reescribir la ecuación 4.31 en términos de la ecuación 4.55 se obtiene:

$$\ell = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - P(q) \quad (4.56)$$

Reemplazando la ecuación 4.56 en la ecuación 4.36 y desarrollar las derivadas el resultado es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} \quad (4.58)$$

Estas ecuaciones están implementadas para k eslabones del robot, en el caso del robot SCARA $k = 4$. Con estos datos la ecuación de Euler-Lagrange se denomina de esta forma:

$$\sum_j d_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + e_k = \tau_k \quad (4.59)$$

Donde

$$e_k = \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

$$e_3 = -17,63 \quad (4.60)$$

$$e_1 = e_2 = e_4 = 0$$

Y τ_k es la fuerza o torque ejercido en las juntas de las articulaciones del robot. Ya que la matriz D es simétrica positiva se puede utilizar los símbolos de Cristoffel de primer orden que son descritos en la ecuación 4.61, los cuales permiten realizar los cálculos de una manera más simple.

$$c_{ijk} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (4.61)$$

$$\sum_j d_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j + e_k = \tau_k \quad k = 1, \dots, 4 \quad (4.62)$$

Donde:

Definiendo la Ecuación 4.62 a la forma matricial, se obtiene.

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) = \tau \quad (4.63)$$

Para hallar los valores de $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ se desarrolla la Ecuación 4.61, donde se observa que D solo depende de q_2 y que esta variable solo se encuentra en las posiciones $D_{1,1}$, $D_{1,2}$ y $D_{2,1}$, esto indica que el resultado es:

$$C_{1,2,1} = C_{2,1,1} = C_{2,2,2} = -0,220 \sin(q_2) \quad (4.64)$$

$$C_{1,1,2} = 0,449 \sin(q_2) \quad (4.65)$$

El resto de los elementos de la matriz son iguales a 0, obteniendo finalmente como resultado para la matriz $C(\dot{q}, \ddot{q})$:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -0,437 \sin(q_2) & -0,873 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0,437 \sin(q_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Remplazando los valores de las ecuaciones 4.47, 4.66 y 4.60 en la Ecuación 4.63 se obtiene el modelo dinámico del robot HM-40704G en forma matricial, como se indica a continuación,

$$\begin{pmatrix} 0,873 \cos(q_2) + 1,267 & 0,437 \cos(q_2) + 0,415 & 0 & -0,001 \\ 0,437 \cos(q_2) + 0,415 & 0,415 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 1,799 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,437 \sin(q_2) & -0,873 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0,437 \sin(q_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -17,630 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Cada elemento de la ecuación 4.63 tiene su representación mecánica siendo $D(q)$ la matriz asociada a las inercias (masas, densidad, volumen, centros de masas), $C(q, \dot{q})$ la matriz de las aceleraciones coriolis y centrifugas, y $e(q)$ la componente gravitacional.

Para completar el modelo dinámico del robot se incluyen las inercias debidas a los actuadores y la relación de los engranajes en las cajas reductoras. Como este componente es inercial la matriz modificada es la D , en donde la ecuación 4.69 se describe matemáticamente siendo J_m una matriz diagonal de 4×4 , donde los elementos de la diagonal representan la inercia de la armadura del motor multiplicada por la relación de la transmisión en la caja. En la tabla 4.6 se observan las principales características dinámicas de los actuadores

$$M(q) = D(q) + J_m \quad (4.68)$$

$$J_m = \begin{pmatrix} j_{m1} \text{rk}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{m2} \text{rk}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{m3} \text{rk}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{m4} \text{rk}_4 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Tabla 4.6: Características dinámicas de los actuadores

Eslabón	$J_{mi} \text{ kg.m}^2$	Relación
Actuador 1	200×10^{-6}	60
Actuador 2	200×10^{-6}	60
Actuador 3	33×10^{-6}	30
Actuador 4	33×10^{-6}	10

Remplazando los valores de la tabla 4.6 en la ecuación 4.69 y resolviendo la ecuación 4.68 se obtiene:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8733 \cos(q_2) + 1,259 & 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0 & -0,001 \\ 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0,4154 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 1,799 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,012 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,012 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0003 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Al resolver la ecuación 4.70 el resultado es el siguiente:

$$M(q) = \begin{pmatrix} 0,8733 \cos(q_2) + 1,271 & 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0 & -0,001 \\ 0,4367 \cos(q_2) + 0,4154 & 0,4274 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 1,799 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Al comparar el valor de la matriz $D(q)$ con la matriz $M(q)$ se aprecia que los valores no varían significativamente, debido a que las componentes inerciales de los motores son pequeñas en comparación con las inercias mecánicas del robot. Esto conlleva a que la ecuación 4.67 no sufra una variación considerable al realizar el cambio D por M , obteniendo como resultado:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) = \tau \quad (4.72)$$

Para implementar el modelo de la dinámica del robot SCARA, se utilizó la herramienta computacional Simulink de MATLAB®, donde la ecuación 4.71 es aplicada en una función de tipo (S) en MATLAB®. Las variables de esta función serán la posición, la velocidad y la aceleración de cada una de las articulaciones de robot SCARA.

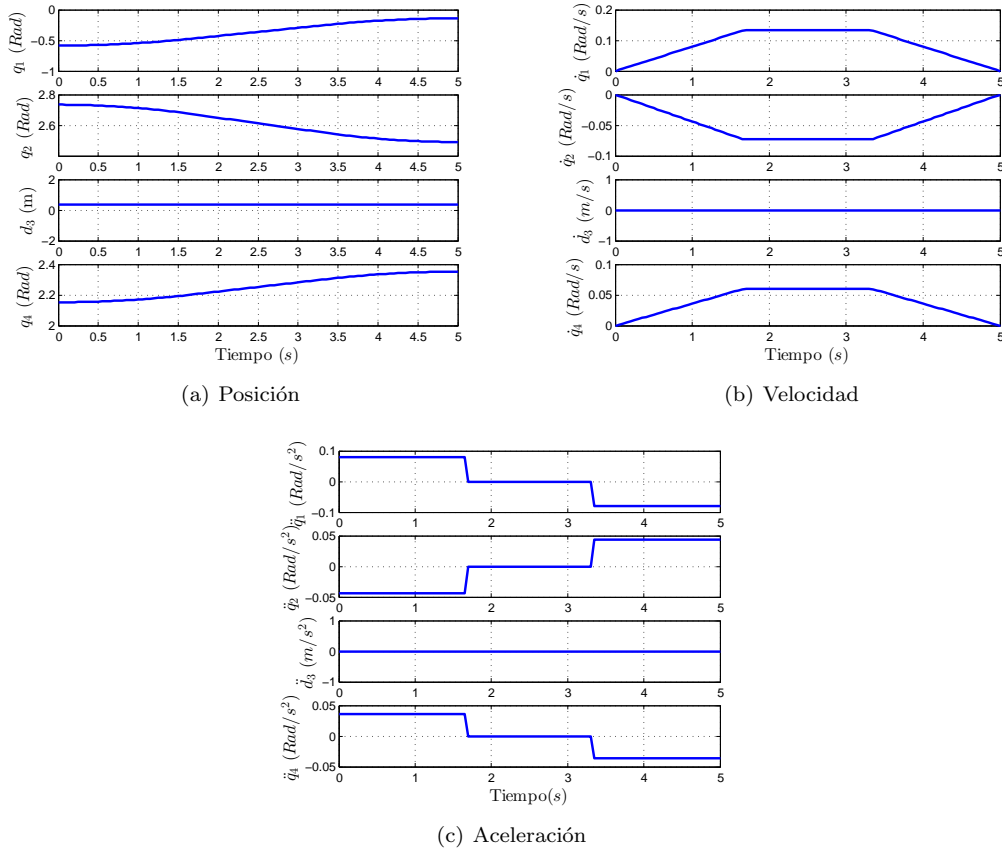


Figura 4.9: Perfil de entrada para la función dinámica en el toolbox y en la función (S).

Para validar el modelo de la dinámica del robot SCARA realizado anteriormente, se utiliza el toolbox de robótica desarrollado por Peter Corke para MATLAB®. El perfil de posiciones para la prueba es obtenido al realizar la interpolación entre los puntos $[0,1 \ 0,1 \ 0 \ 0]$ y $[0,1 \ 0,2 \ 0 \ 0]$ donde

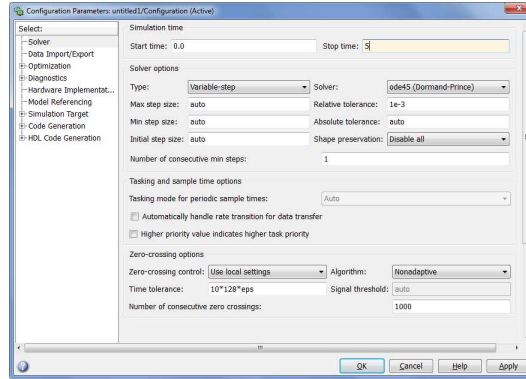


Figura 4.10: Parámetros de simulación para corroborar dinámica

los tres primeros elementos corresponden a las coordenadas x, y y z y la última componente es el ángulo de rotación del efector final θ ; con la ayuda de la cinemática inversa se hallan los valores para las articulaciones del robot. Para un mejor desempeño del robot se propone un perfil de velocidad tipo trapezoidal para cada articulación y así se determina el perfil de aceleraciones y el perfil de las posiciones para las articulaciones. Estos perfiles se observan en las figura 4.9(a), 4.9(b) y 4.9(c).

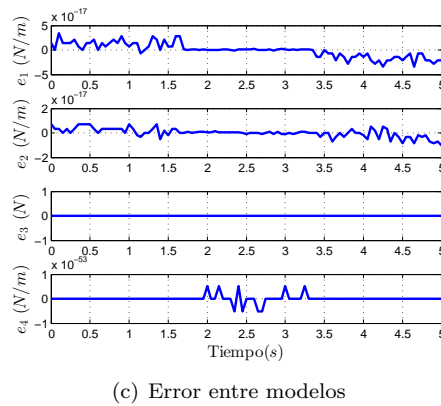
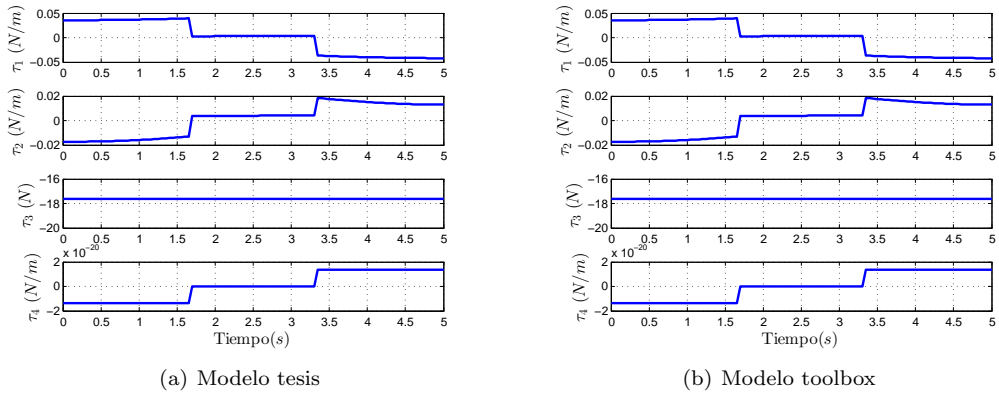


Figura 4.11: Resultado de la dinámica del robot SCARA Tesis Vs Toolbox.

En la figura 4.11(a) se observa el resultado obtenido al utilizar el modelo de la tesis, en la figura 4.11(b) se muestra el resultado al ejecutar el toolbox de MATLAB®. Estas dos simulaciones son

realizadas en Simulink con los parámetros de simulación presentados en la figura 4.10. Con el propósito de conocer la diferencia entre las dinámicas se halla la diferencia entre los comportamientos de la dinámica. Esta diferencia está en el orden de 10^{-17} unidades como se observa en la figura 4.11(c). El error existente entre las dos dinámicas es debido a las aproximaciones decimales, además el modelo de MATLAB® utiliza un método de RNE (Newton - Euler Recursivo) el cual tiene un enfoque diferente al utilizado en la dinámica obtenida en este documento.

Con estos resultados se puede validar el modelo obtenido a lo largo del desarrollo de este documento y por consiguiente realizar el análisis de control para un robot SCARA. Cabe aclarar que en este modelo académico se han tratado de manejar las variables lo más cercanas posible al robot real, pero no se tienen en cuenta dinámicas producidas por efectos de las fricciones estáticas y dinámicas en los rodamientos de las juntas del robot.

Capítulo 5

CONTROL DE FUERZA

El propósito de este capítulo es caracterizar y parametrizar dos técnicas de control de fuerza como son el control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición), ambos basados en la dinámica inversa del robot SCARA. La forma en que se presenta este capítulo es la siguiente: en la primera sección se presenta el concepto de dinámica inversa y se desarrolla la del robot SCARA, además se describe la relación entre el torque y el voltaje de los actuadores. En la segunda sección se realiza la descripción del control de impedancia y su parametrización según el modelo del ambiente. Por último en la tercera sección se realiza el mismo procedimiento antes mencionado para el control híbrido.

5.1 Control de robots con dinámica inversa

Cuando se describen los componentes constructivos de un robot SCARA se encuentra que es común utilizar servomotores como actuadores, en donde típicamente un enfoque robótico la variable de entrada es un voltaje y la de salida es una fuerza mecánica denominada torque. Cuando se analiza el modelo de comportamiento del robot se utiliza como variable de actuación torque, pero para que esta señal pueda ser enviada al motor es necesario realizar una conversión de torque a voltaje. Lo anterior se representa a través de la ecuación 5.1 como se detalla a continuación:

$$\tau = r_k \frac{K_k}{R_k} V_k \quad (5.1)$$

En donde K_k es la constante de torque del motor, R_k es la resistencia de la armadura, V_k es el voltaje de entrada y τ es el torque de salida.

Al desarrollar la relación entre el torque y el voltaje se obtiene la dinámica del robot descrita en la ecuación 4.67, donde se observa que no son tenidas en cuenta las fuerzas y torques externos que afectan al robot. Este tipo de fuerzas pueden aparecer al momento de realizar tareas como el ensamble, corte y manipulación de objetos, típicamente estas fuerzas son ejercidas sobre el efector final y afectan los torques en los eslabones del robot. Para complementar la dinámica del robot se hace necesario agregar los términos de fuerzas externas a la ecuación de la dinámica del robot, con la ayuda del Jacobiano es posible expresar las fuerzas ejercidas en el efector final sobre los actuadores del robot. La relación anterior es presentada matemáticamente en la ecuación 5.2.

$$F_{tau} = J^T F_e \quad (5.2)$$

Al adicionar este término en la ecuación 4.67 de la dinámica del robot se obtiene:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) + J^T(q) F_e = u \quad (5.3)$$

Para realizar un control de fuerza de forma directa en el robot es necesario conocer la fuerza de interacción con el ambiente. Existen diferentes formas de medir esta fuerza como puede ser a través de la corriente consumida por cada actuador del robot, pero esta medida es imprecisa por la gran cantidad de parámetros inciertos respecto al motor, además se desarrolla en el espacio articular del robot. Otra forma de medir la fuerza es la utilización de sensores de fuerza como por ejemplo un sensor de tipo muñeca, este tipo de sensor se puede observar en la figura 5.1 en donde se observa que éste tiene la capacidad de medir las fuerzas en los ejes (x, y, z) y los torque en sus respectivos ejes de rotación (n_x, n_y, n_z) ; es decir, se puede medir la fuerza en los 6 grados de libertad. Por otra parte este sensor posee un mayor uso dado que la medición de las fuerzas se realiza en el espacio de trabajo y como se detalla más adelante el cómputo de la ley de control se obtiene de una menor complejidad.

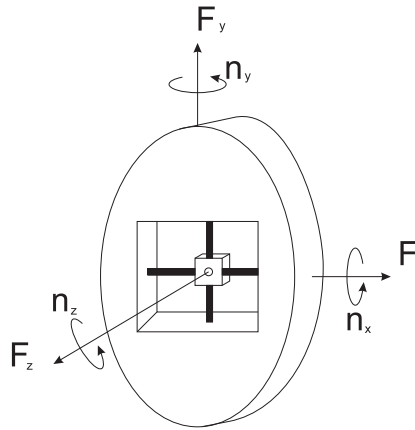


Figura 5.1: Sensor de muñeca para robots industriales [23]

Realizar una ley de control aplicada para un robot industrial no es una tarea fácil debido a la no linealidad del sistema y a su modelo acoplado mecánicamente; es decir, el movimiento de la primera articulación afecta el movimiento de la segunda y así sucesivamente. En la ecuación 4.67 se observa lo mencionado anteriormente. Por tal motivo encontrar una ley de control que compense estas características es una tarea dispendiosa y compleja, pero una solución a este problema es implementar un modelo inverso de la dinámica del robot que compense la no linealidad y además genere un desacople del sistema.

En la ecuación 5.4 se propone una ley de control con dinámica inversa en donde $M(q)$ es la matriz de inercias asociada al robot, a_q es la variable de control asociada a la dinámica del robot en términos de la aceleración, $C(q, \dot{q})$ es la matriz con las componentes de la aceleración de coriolis y centrípeta, $e(q)$ son los componentes gravitaciones, $J^T(q)$ es el Jacobiano geométrico y a_f es la variable asociada a la dinámica de la fuerza en el robot. Existe una dificultad al aplicar esta ley de control dado que es necesario conocer en su totalidad los parámetros de la dinámica del robot como son las matrices M , C y e , si estos datos no son idénticos cualquier variación de los mismos genera que la inversión no sea exacta y exista nuevamente la no linealidad y el acople de las variables. Por otra parte se debe tener en cuenta que estas matrices deben ser invertibles para realizar la ley de control con dinámica inversa de forma correcta.

$$u = M(q) a_q + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) + J^T(q) a_f \quad (5.4)$$

La ecuación 5.4 es propuesta por Spong [23] en donde a_q y a_f son las variables internas de control, una en términos de aceleración y la otra en términos de fuerza, respectivamente.

En la actualidad la gran mayoría de los actuadores en los robots son alimentados eléctricamente, en donde el voltaje se refleja como un torque. Éste es representado en posición, velocidad y aceleración en las articulaciones. Para simular el modelo del robot es necesario resolver la ecuación diferencial 5.3 obteniendo la ecuación 5.5 en donde la variable de entrada al sistema será el torque y a partir de este

se calcularía la aceleración, con esta variable es posible conocer la velocidad en la ecuación 5.6 y la posición del robot en la ecuación 5.7.

$$\ddot{q} = M^{-1} \{u - C(q, \dot{q}) \dot{q} - e(q) - J^T F_e\} \quad (5.5)$$

$$\dot{q} = \int \ddot{q} \quad (5.6)$$

$$q = \int \dot{q} \quad (5.7)$$

Al representar la ecuación 5.5 en diagrama de bloques para el robot SCARA se obtiene el mostrado en la figura 5.2 en donde se debe resaltar que para resolver la ecuación diferencial es necesario conocer las condiciones iniciales tanto en posición como en velocidad del robot. Cuando se utiliza el programa Simulink de MATLAB® para resolver esta ecuación se requiere generar una secuencia en la ejecución de los bloques y para lograr esto la gran mayoría de las funciones desarrolladas se implementan como funciones de tipo (S). Con este tipo de función es posible crear el orden necesario de ejecución dentro del ambiente de Simulink para solucionar el inconveniente de la inicialización de las condiciones iniciales, ya que si no se tienen inicializadas faltaría información para la ejecución y el sistema se volvería inconsistente debido a que los bloques restantes de la simulación no trabajarán por la ausencia de variables de entrada.

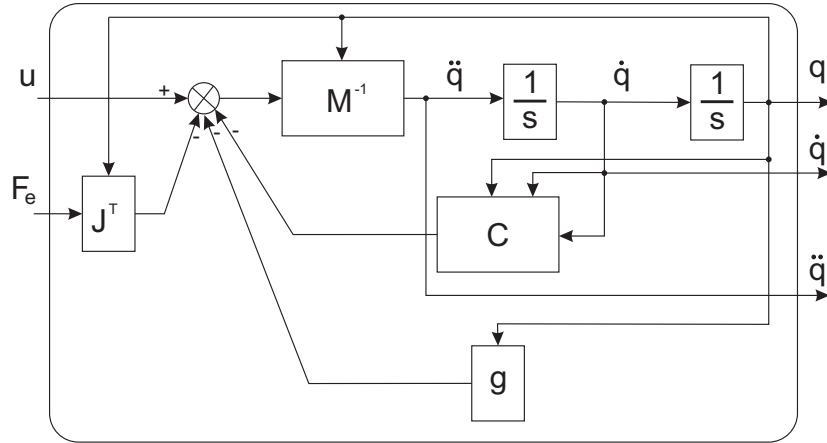


Figura 5.2: Diagrama de bloques dinámica Robot SCARA

La solución presentada para el desarrollo de la ecuación diferencial del robot debe ser implementada de igual forma en la dinámica inversa, en donde el diagrama de bloques obtenido se representa en la figura 5.3.

Al llevar el diagramas de bloques de las figuras 5.2 y 5.3 en expresiones matemáticas se obtiene la ecuación 5.8 donde al simplificarlos términos se obtiene un doble integrador cuando a_f es igual a F_e .

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) + J^T(q) F_e = M(q) a_q + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) + J^T(q) a_f \quad (5.8)$$

$$\ddot{q} = a_f + J(q) M^{-1}(q) J^T(q) (F_e - a_f) \quad (5.9)$$

$$\ddot{q} = a_f \quad (5.10)$$

En el diagrama 5.4 se observa el acople entre la dinámica inversa y la dinámica del robot SCARA y el bloque C es la representación del controlador que impondría la dinámica al robot.

Esta forma de linealización es óptima siempre y cuando se conozcan totalmente los parámetros del robot a controlar, cabe notar que estos parámetros al ser mecánicos pueden variar debido a la construcción del mismo haciendo que la dinámica inversa no compense la del robot. Una forma de

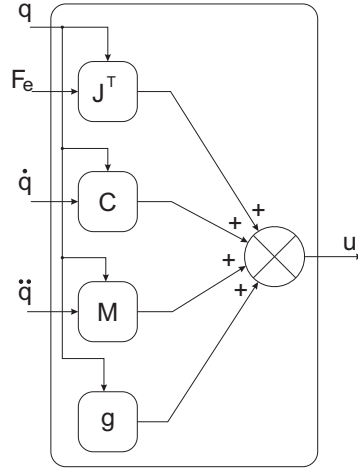


Figura 5.3: Diagrama de bloques dinámica inversa robot SCARA

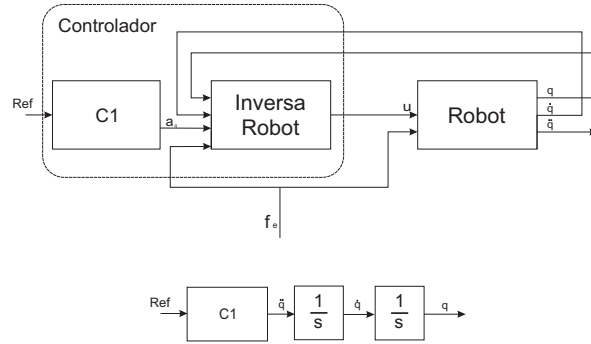


Figura 5.4: Diagrama de bloques dinámica y dinámica inversa de robot SCARA

solucionar este inconveniente es realizar la caracterización del robot una vez terminada su construcción, pero esto implica implementarla con cada robot fabricado lo que conlleva a un incremento en los costos de producción.

Para el desarrollo de esta tesis se utiliza el modelo computacional del Robot SCARA obteniendo los parámetros del software Delmia V5R20, no se tienen en cuenta las incertidumbres generadas por la fabricación dado que solo se realiza la etapa de simulación del robot.

5.2 Control de Impedancia

Para realizar un control de impedancia en un robot se necesita conocer el modelo matemático del sistema. El primer objetivo de un sistema de control es alcanzar la posición deseada en el efector final (Control de posición). Una forma de encontrar una ley de control en posición es con la ayuda de la dinámica inversa del robot, como ya se mencionó esta permite linealizar la dinámica y desacoplar las variables.

En la ecuación 5.11 se encuentra el modelo del robot acoplado con la dinámica inversa, donde \ddot{q} y a_q son la aceleración y la variable de imposición de la dinámica del robot respectivamente. La dinámica que se desea imponer al robot es la obtenida por un controlador de tipo proporcional derivativo (PD) como el presentado en la ecuación 5.12 donde K_p es la matriz diagonal de los valores proporcionales, K_d es la matriz diagonal con los valores derivativos, q es la posición medida, q_d es la posición deseada, \dot{q} es la velocidad medida y \dot{q}_d es la velocidad deseada.

$$\ddot{q} = a_q \quad (5.11)$$

$$a_q = K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + \dot{q}_d \quad (5.12)$$

Una forma de seleccionar los valores de las ganancias K_p y K_d es elegir la forma de respuesta para los eslabones. Teniendo en cuenta las tareas que realizan los sistemas robóticos la respuesta adecuada es la críticamente amortiguada. Este tipo de respuesta es conveniente debido a que no tiene sobre picos que afecten el posicionamiento del robot y es la respuesta más rápida con esta característica. Tomando la ecuación de segundo orden de la forma $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ para lograr una respuesta de este tipo el valor de $\zeta = 1$. Finalmente al reemplazar la ecuación 5.12 en la ecuación 5.11 se obtiene:

$$\hat{q} + K_d \hat{\dot{q}} + k_p \hat{q} = 0 \quad \hat{q} = q_d - q \quad (5.13)$$

Para que el sistema sea críticamente amortiguado los valores de K_p y k_d deben ser:

$$K_d = \begin{pmatrix} 2\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_4 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$K_p = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Donde ω_i son las frecuencias naturales de cada eslabón, las cuales a su vez influyen directamente la velocidad con la que los actuadores responden.

Para determinar la acción de la señal de control sobre el robot SCARA se implementa el controlador como se muestra en la figura 5.5.

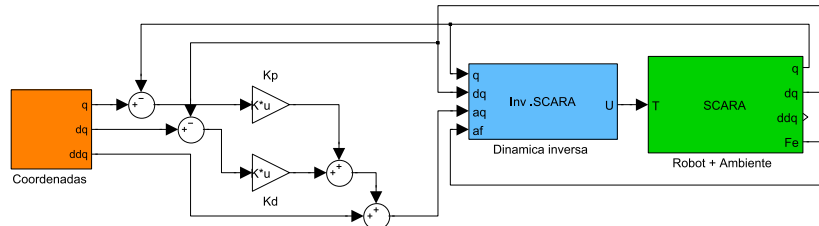


Figura 5.5: Diagrama de control PD de posición con realimentación en posición y velocidad

Para comprobar el funcionamiento de la ley de control se implementa una simulación donde se pretende alcanzar un punto en el espacio de trabajo desde la posición $(0,7 \ 0 \ 0,35 \ 0)$ hasta el punto $(0,5 \ 0,3 \ 0,5 \ 0)$, los valores de prueba de ω_i tomados son: 0,5, 1, 10 y 100. El perfil de velocidad implementado es de tipo trapezoidal y el tiempo en que se desea que alcance el punto es de 10 segundos.

En la figura 5.6 se observa que entre mayor sea ω menor será el error de posición pero la oscilación de la señal de control será mayor. Esto evidencia que es necesario determinar el valor correcto de la frecuencia natural del sistema ya que esta influye directamente en la señal de control para el robot.

Para la tarea de corte es necesario utilizar otro tipo de control diferente a solo el de posición, ya que en este proceso según sea la herramienta, se ejercerán fuerzas externas diferentes a las propias del robot. Como ya se había mencionado estas fuerzas cambian directamente la dinámica del robot haciendo que este no posea un buen control de posición sobre las mismas.

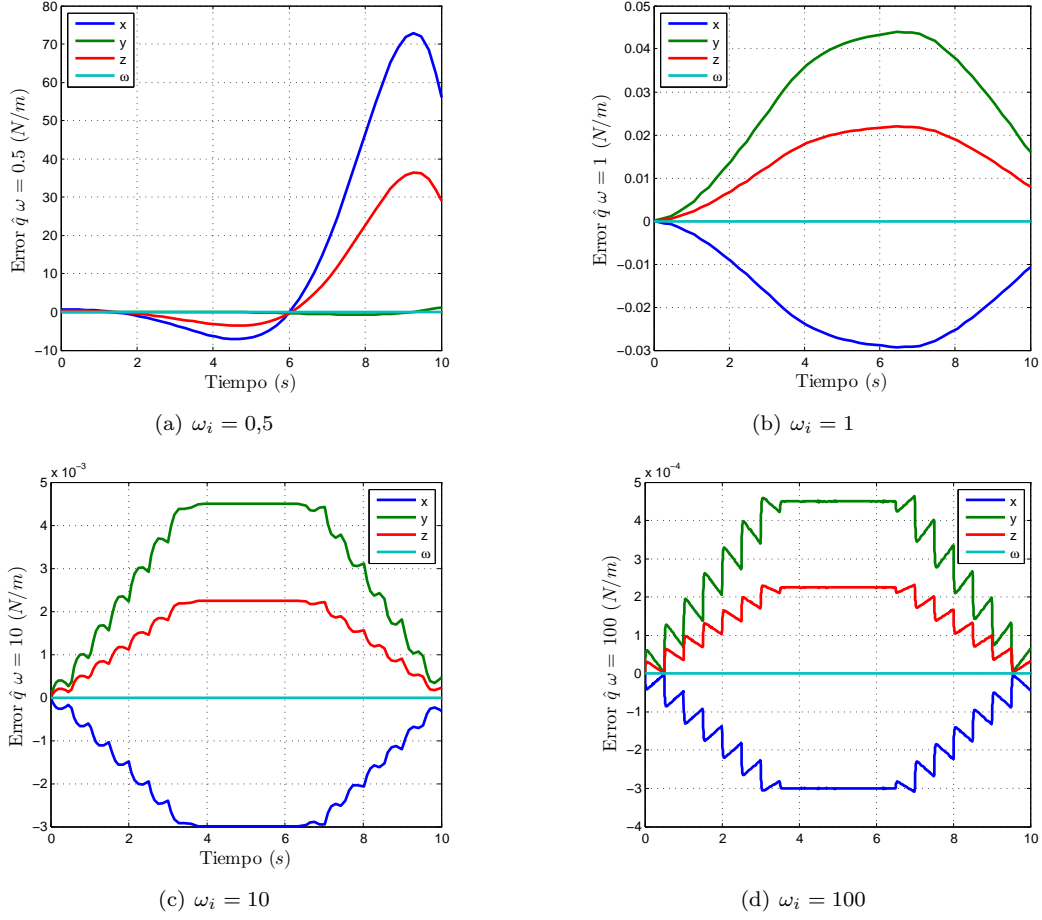


Figura 5.6: Errores de posición en el espacio articular para $\omega_i = 0,5 \quad 1 \quad 10 \quad 100$

Existen diferentes técnicas para realizar el control de fuerza en un robot. Una de estas es el control de impedancia, la acción de este control se puede caracterizar como el enmascaramiento de las variables físicas del robot por unas deseadas. Una forma usualmente utilizada para formular la impedancia es:

$$f(t) = Z(p)v(t) \quad (5.16)$$

En la ecuación 5.16 se denota la relación dinámica entre la fuerza y la velocidad de desplazamiento, en donde $f(t)$, $Z(p)$ y $v(t)$ representan la fuerza, la impedancia del robot y la velocidad en el espacio cartesiano. La variable $p = \frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal.

El control de impedancia para un sistema mecánico $Z(p)$ es posible implementarlo como un sistema lineal de segundo orden. Representado de forma matemática es,

$$f = (I_d s^2 + B_d s + K_d) \hat{x} \quad (5.17)$$

Donde I_d , B_d y K_d son matrices diagonales de tamaño $n \times n$ donde n es el número de grados de libertad. Cada una de estas matrices definen la inercia, el factor de amortiguamiento y la rigidez que se desea para el robot. El comportamiento que es definido en estas matrices está asociado al espacio de trabajo. Cuando el robot es de 6 grados de libertad el primer elemento de la diagonal en la matriz hace referencia al eje de desplazamiento x , el segundo al eje de desplazamiento y y el tercero al eje de desplazamiento z . Para las rotaciones sobre los ejes x , y y z se utilizan los elementos 4, 5 y 6 de la diagonal. Como se ilustra en la ecuación 5.18.

$$I_d = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \quad K_d = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Como ya se mencionó esta ley de control está diseñada para realizar la acción sobre el espacio de trabajo, con lo cual se hace necesario transformar la dinámica del espacio articular al espacio de trabajo. Para lograr esta transformación se utiliza la relación expuesta en la ecuación 5.19:

$$\dot{x} = J \dot{q} \quad \ddot{x} = \dot{J} \dot{q} + J \ddot{q} \quad (5.19)$$

Al reemplazar y despejar la ecuación 5.19 en la ecuación 5.4 se obtiene:

$$M^*(x) \ddot{x} + C^*(x, \dot{x}) + e^*(x) + F_e = F_\tau \quad (5.20)$$

En donde

$$M^* = J^{-T} M J^{-1} \quad (5.21)$$

$$C^* = J^{-T} C J^{-1} - J^{-T} M \dot{J} J^{-1} \quad (5.22)$$

$$e^* = J^T e \quad (5.23)$$

La ecuación 5.20 representa la dinámica del robot expresada en el espacio de trabajo, esta dinámica tiene las mismas características que posee la dinámica en el espacio articular con su respectiva dinámica inversa, lo cual genera como resultado un sistema desacoplado y lineal.

La dinámica inversa del sistema en el espacio de trabajo se describe como:

$$u = M^*(x) a_x + C^*(x, \dot{x}) \dot{x} + e(x)^* + F_a \quad (5.24)$$

En donde a_x y F_a son las variables de control externas con unidades en aceleración y fuerza respectivamente. Asumiendo que F_a es igual F se obtiene:

$$\ddot{x} = a_x \quad (5.25)$$

Tomando la ecuación 5.17 y transformándola en la ley de control del sistema con la dinámica inversa se obtiene:

$$F = I_d (a_x - \ddot{x}) + B_d \dot{\hat{x}} + K_d \hat{x} \quad (5.26)$$

Donde se define $\hat{x} = x_d - x$

Al despejar la variable de control externo se obtiene:

$$a_x = \ddot{x} - I_d^{-1} (B_d \dot{\hat{x}} + K_d \hat{x} + F) \quad (5.27)$$

Cuando se analiza el comportamiento de la posición en la ley de control de impedancia, se obtiene ecuación 5.28,

$$F = I_d \hat{\ddot{x}} + B_d \dot{\hat{x}} + K_d \hat{x} \quad (5.28)$$

En la ecuación 5.28 se observa que si la fuerza de contacto F es igual a 0 el error de posición deberá ser igual a 0; es decir, el sistema de control funciona como control de posición siempre y cuando no existan fuerzas de interacción con el robot. Cuando exista interacción el error de posición será proporcional a la fuerza de interacción entre estos.

Parametrización del control en impedancia

Para encontrar los valores adecuados en la sintonización del control de impedancia este se analiza como un sistema de segundo orden. Esta forma de sistema se evidencia en la ecuación 5.26 donde las variables I_d , B_d y K_d determinan el comportamiento deseado.

Este sistema de control tiene inconvenientes para lograr una adecuada sintonización ya que es necesario conocer el modelo del ambiente al que se le aplicarán las fuerzas. Conocer este modelo no es una tarea fácil de lograr, por lo que se hace necesario generar un modelo lo más aproximado posible y así encontrar los valores adecuados del controlador.

Ilustrando a manera de ejemplo, se tiene un robot SCARA en contacto con un plano que se encuentra perpendicular al eje z del efector final del robot. Este plano es de tipo deformable y su comportamiento se puede modelar como:

$$f_p = k_p (x_r - x) \quad (5.29)$$

Donde f_p , k_p , x_r y x son la fuerza de reacción, la constante del material del plano, la posición de la superficie y el desplazamiento de la superficie, respectivamente. En la figura 5.7 se observa el robot SCARA con su efector final sobre una superficie (compliant), al lado izquierdo se observa una aproximación de lo que pasa al aplicar una fuerza sobre la superficie, donde x_r es la posición del plano y x es el desplazamiento del efector final dentro del plano.

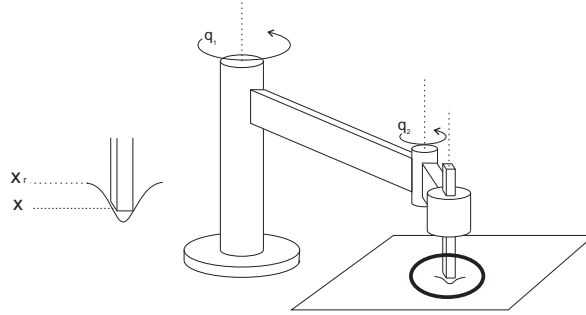


Figura 5.7: Robot SCARA realizando fuerza sobre plano x, y

Este plano deformable se encuentra sobre el plano x, y a una distancia de 350 mm en el eje z ($z_0 = 0,35m$) respecto a la base de robot, este tiene una rigidez para el primer ejemplo de $k_{pz} = 1000N/m$ $k_{px} = k_{py} = k_{p\alpha} = 0$. Este ejemplo se realiza con una entrada constante en posición.

La dinámica del robot y la del ambiente en los 4 grados de libertad matemáticamente se describe así:

$$I_{dx} (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + b_{dx} (\dot{x} - \dot{x}_d) + k_{dx} (x - x_d) = k_{px} x_e \quad (5.30)$$

$$I_{dy} (\ddot{y} - \ddot{y}_d) + b_{dy} (\dot{y} - \dot{y}_d) + k_{dy} (y - y_d) = k_{py} y_e \quad (5.31)$$

$$I_{dz} (\ddot{z} - \ddot{z}_d) + b_{dz} (\dot{z} - \dot{z}_d) + k_{dz} (z - z_d) = k_{pz} (z_0 - z) \quad (5.32)$$

$$I_{d\alpha} (\ddot{\alpha} - \ddot{\alpha}_d) + b_{d\alpha} (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_d) + k_{d\alpha} (\alpha - \alpha_d) = k_{p\alpha} \alpha_e \quad (5.33)$$

Al operar las ecuaciones 5.30 - 5.33 y asumiendo que la posición del efector final es constante; es decir, los valores \ddot{x} y \dot{x} son 0, las ecuaciones resultantes son:

$$I_{dx} \ddot{x} + b_{dx} \dot{x} + k_{dx} x = k_d x_d \quad (5.34)$$

$$I_{dy} \ddot{y} + b_{dy} \dot{y} + k_{dy} y = k_d y_d \quad (5.35)$$

$$I_{dz} \ddot{z} + b_{dz} \dot{z} + z(k_{pz} + k_{dz}) = k_{pz} z_0 + k_{dz} z_d \quad (5.36)$$

$$I_{d\alpha} \ddot{\alpha} + b_d \dot{\alpha} + k_{d\alpha} \alpha = k_{d\alpha} \alpha_d \quad (5.37)$$

Cada uno de los ejes del sistema está regido por un comportamiento de segundo orden. Según sea el valor de ω y ς se podrá generar un comportamiento críticamente amortiguado, subamortiguado o sobreamortiguado. En los ejes $j = (x, y, \alpha)$ se puede describir de la siguiente manera este comportamiento.

$$\omega_{nj} = \sqrt{\frac{k_{dj}}{i_{dj}}} \quad \varsigma_j = \frac{b_{dj}}{2 \sqrt{i_{dj} k_{dj}}} \quad (5.38)$$

Y en el eje z la dinámica del robot se mezcla con el ambiente, la ecuación obtenida es de la siguiente forma:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_{dz} + k_{pz}}{i_{dz}}} \quad \varsigma_z = \frac{b_{dz}}{2 \sqrt{i_{dz} (k_{dz} + k_{pz})}} \quad (5.39)$$

Para obtener un $\varsigma = 0,5$ se encuentra que los valores de I_d , B_d y K_d pueden ser 100, 500 y 2500, respectivamente. Con estos valores se obtiene un valor de $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ para los ejes donde no existe fuerza del ambiente y un valor de $\varsigma_z = 0,42$ y de $\omega_{nz} = 5,9 \text{ rad/s}$ en el eje donde el robot interactúa con un valor del medio de $k_{pz} = 1000 \text{ N/m}$.

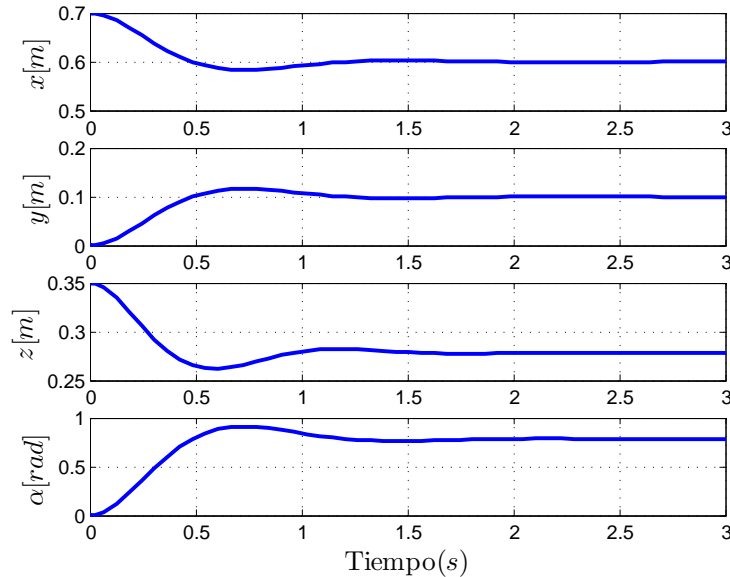


Figura 5.8: Posiciones en el espacio articular de la punta del robot con una trayectoria constante

En la figura 5.8 se presenta el comportamiento del efector final del robot a través de cada uno de los ejes, se observa que en los ejes x, y, ω el error de posición es 0, situación que no es cierta en el eje z , debido a que en este eje existe una fuerza de reacción al movimiento. Esta fuerza es debida a la penetración del efector final sobre el plano.

En la figura 5.9 se observa el perfil de la fuerza ejercida por el robot al plano, allí se obtiene que el comportamiento del perfil es subamortiguado el cual es el deseado en la ecuación que describe el sistema.

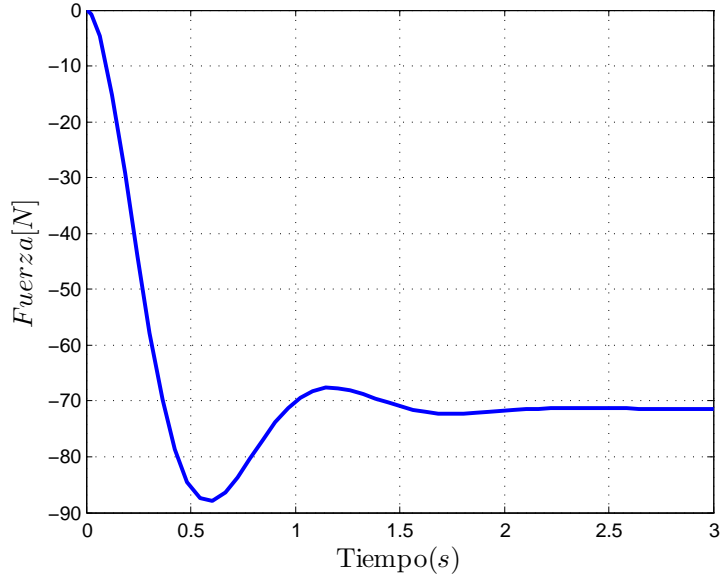


Figura 5.9: Fuerza ejercida por el robot sobre el plano en la dirección del eje z con $k_p = 1000 \text{ N/m}$

Para demostrar la influencia de la dinámica del ambiente sobre el comportamiento del robot se realiza el mismo ejemplo pero con una constante del ambiente de $k_p = 10000 \text{ N/m}$. Para esta constante los valores de ς_z y ω_{nz} son $11,2 \text{ rad/s}$ y 0.22 respectivamente. La figura 5.10 muestra la dinámica del robot en el eje z donde en la parte izquierda se observa el comportamiento de la posición y al lado derecho la fuerza ejercida por el robot. En el comportamiento de los perfiles se observa que obedecen a las nuevas constantes donde el sistema presenta una mayor oscilación y una mayor fuerza ejercida.

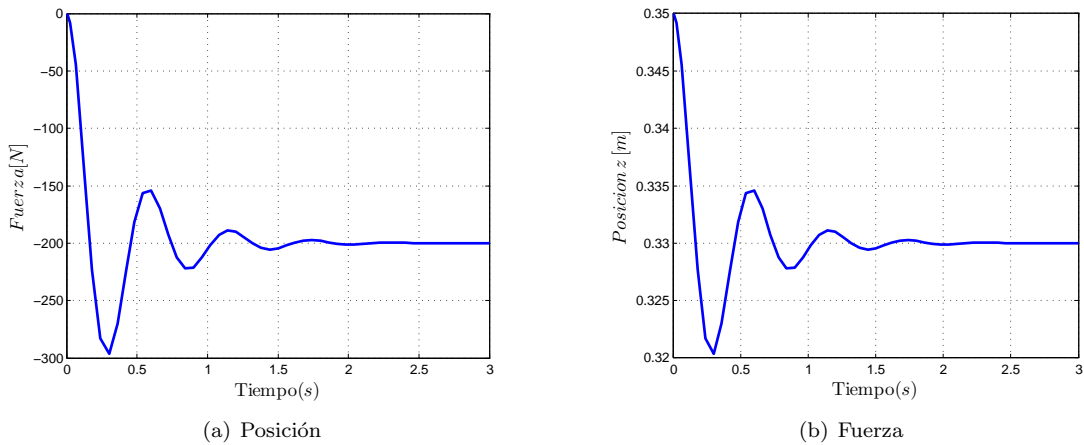


Figura 5.10: (a) Posición y (b) fuerza del eje Z para un ambiente con $k_p = 10000 \text{ N/m}$

Analizando los resultados del comportamiento de la fuerza se observa que en ambos casos siempre que exista una dinámica de oposición en el ambiente el error de posición no será 0. Entre mayor sea la constante del ambiente mayor es la fuerza ejercida por el robot. Para $k_p = 1000 \text{ N/m}$ la fuerza final

ejercida fue de $71,4N$ y el efector final avanzó $7,14\text{ cms}$. Cuando la constante fue de $k_p = 10000N/m$ la fuerza aplicada por el robot fue de $200N$ y el efector final tuvo un desplazamiento de $2cms$ en la dirección del eje z . En ambos casos el comportamiento fue subamortiguado, pero el de mayor rigidez resulta ser menos amortiguado que el de menor rigidez.

Para lograr una buena selección de los parámetros de impedancia y obtener un comportamiento deseado para el robot, es necesario conocer el modelo del ambiente, esto hace que esta tarea no sea fácil de lograr y que puedan existir varios parámetros de impedancia para una misma aplicación.

5.3 Control Híbrido (Fuerza - posición)

El control híbrido (fuerza - posición) para robots industriales es una técnica basada en el comportamiento que debe tener el robot por cada grado de libertad; es decir, cada grado de libertad es controlado en términos de la posición o en términos de la fuerza.

Para realizar un control híbrido es necesario conocer las restricciones del sistema, las cuales se definen como las limitaciones de posición, velocidad y fuerza que tiene el manipulador por cada grado de libertad. Existen dos tipos de restricciones como son las naturales y las artificiales, las restricciones naturales se pueden definir como aquellas que surgen de acuerdo con cada situación de contacto en el manipulador. Las restricciones artificiales son introducidas para especificar los movimientos y las fuerzas deseadas en el robot.

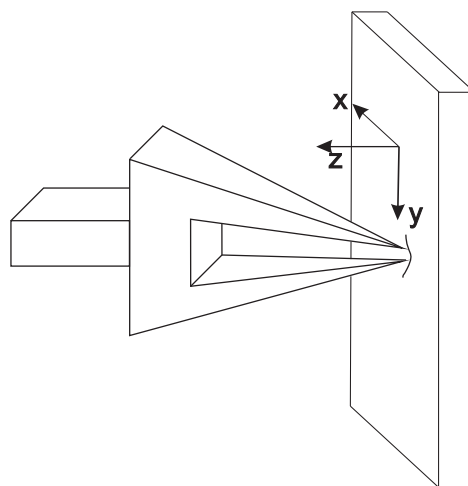


Figura 5.11: Efector final en contacto con superficie plana

En la figura 5.11 se observa el efector final de un manipulador que se encuentra en contacto con una superficie plana desplegada sobre los ejes (x, y) . Al realizar un análisis de las limitaciones en el sistema de la figura 5.11 se obtiene que las restricciones naturales se encuentran en posición y velocidad en la dirección normal al plano de la superficie y las restricciones artificiales son las de fuerzas que se encuentran en las direcciones tangenciales al plano, lo que puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$V_z = 0, \quad W_x = 0, \quad W_y = 0 \quad (5.40)$$

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad N_z = 0 \quad (5.41)$$

En las ecuaciones 5.40 se encuentran las restricciones naturales en la posición y en las ecuaciones 5.41 se hallan las restricciones naturales debidas a la fuerza. Cabe notar que no se tienen en cuenta las fuerzas debidas a la fricción del plano en las direcciones x, y . Las restricciones artificiales del sistema son las ecuaciones 5.42 y 5.43

$$V_x = V_d, \quad V_y = V_d, \quad W_z = 0 \quad (5.42)$$

$$F_z = F_d, \quad N_x = 0, \quad N_y = 0 \quad (5.43)$$

Donde V_d y F_d son la velocidad y la fuerza deseada para el robot, las demás restricciones que no son naturales deben estar especificadas como artificiales; es decir, todos los movimientos o fuerzas del sistema deben estar especificados.

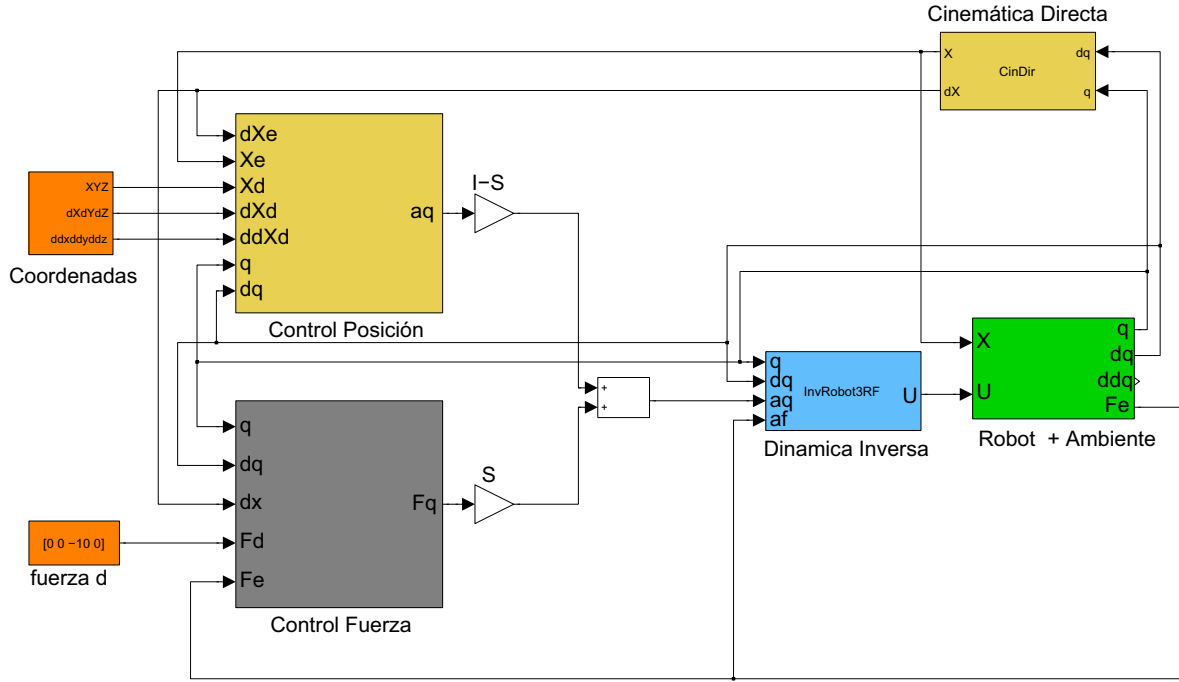


Figura 5.12: Esquema de control híbrido

En la figura 5.12 se encuentra el esquema de control híbrido y el robot, en donde se aprecia que existen 6 bloques los cuales se dividen en posiciones deseadas, fuerzas deseadas, control de posición, control de fuerza, dinámica inversa, robot mas ambiente y los bloques selectores. Como se observa la ley de control es independiente en posición y fuerza y por medio del bloque selector S , es posible disgregar la acción tanto en posición como en fuerza. Posteriormente estas dos señales son sumadas e introducidas a la dinámica inversa del robot, la señal que proviene de esta dinámica es recibida por el robot y este realizará la tarea propuesta con o sin contacto con el ambiente.

El Bloque S representa una matriz diagonal cuadrada de $n \times n$ donde n es el número de grados de libertad del sistema, los elementos de la diagonal son 1 donde existan restricciones artificiales en fuerza, el resto de los elementos son 0. Este bloque se encuentra en serie con el control de fuerza.

Por otra parte el bloque que se encuentra en serie con el control de posición es igual a $I - S$ donde I representa la matriz identidad y la matriz S las restricciones de fuerza, el resultado es una matriz diagonal con valores de 1 en donde los valores restantes de la matriz S son 0.

Para el ejemplo de la figura 5.11 las matrices de restricción son:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Donde se observa que la matriz S representa un manipulador con 6 grados de libertad y que contiene un elemento con el valor de 1, este valor representa el control de fuerza que se debe realizar sobre el eje z , mientras los valores en 1 de la matriz $I - S$ representan el resto de los ejes que serán controlados en posición.

Al analizar la matriz S se halla que el control híbrido es de tipo excluyente, esto debido a la independencia entre el control de posición y el control de fuerza. Es de notar que debido a las restricciones se puede generalizar que existe una relación entre el control de posición y el control de fuerza, lo que se puede explicar cómo si existe un plano controlado en posición el eje perpendicular a este plano se controlará en fuerza.

Para realizar el control híbrido de un manipulador se hace necesario generar una estrategia de control que se diseñará según sea la aplicación para la cual se usa el robot, esto debido a la división de las tareas en control como son la posición y la fuerza. Un posible orden para la estrategia es:

- Una labor compleja debe ser dividida en subtareas, donde cada una quedará definida por las restricciones artificiales necesarias.
- Las restricciones artificiales son las referencias para el sistema de actuación del robot ya sean en posición o fuerza.
- La transición entre subtareas se da cuando se cumple determinadas condiciones que deben ser suministradas al sistema.
- La descomposición de subtareas puede ser una tarea de planificadores automáticos.

Esta estructura de control tiene la particularidad que cada sub-controlador se puede diseñar de forma independiente, donde el control de posición puede ser de tipo PD y el controlador de fuerza podría ser de tipo *PID* (Proporcional - Integral - Derivativo). Cabe apreciar que el control de fuerza se encuentra determinado por la estructura del medio en el que interactúa.

Parametrización del control híbrido

La parametrización del control híbrido se realiza por separado; es decir, se plantea un control de fuerza en los ejes que realizarán estas tareas y un control de posición para los espacios restantes.

Para realizar la parametrización se toma como modelo el robot SCARA estudiado en esta tesis y se le aplica una ley de control en posición y otra en fuerza para la tarea de pulido de una superficie plana, ver figura 5.11. Con anterioridad se mencionó que el resultado del análisis de las restricciones es una matriz S que representa un manipulador de 6 grados de libertad, pero como el robot SCARA solo tiene 4 GDL, a la matriz S se le sustraen para el caso las filas de los grados de libertad sobrantes, quedando como resultado la matriz 5.45.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

En la matriz S presentada en 5.45 existe un solo valor de 1 que representa la superficie en la cual el robot SCARA debe mantener una fuerza constante sobre la superficie a pulir y el resultado de $I - S$ simboliza los ejes donde se realiza la trayectoria de pulido. Para lograr el control de posición se plantea la ley de control de la ecuación 5.49, esta ley de control es un sistema proporcional - derivativo en posición para el cual se asume que solo seguirá la trayectoria deseada sin la presencia de fuerzas externas de perturbación. Las siguientes ecuaciones representan la transformación de la ley de control del espacio de trabajo al espacio articular.

$$a_x = \ddot{x}_d - \hat{x} B_d - \hat{x} K_d \quad (5.46)$$

$$a_q = J^{-1}(q) a_x - \dot{J}(q) \dot{q} \quad (5.47)$$

$$u = M(q) a_q + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) \quad (5.48)$$

$$u = M(q) (J^{-1}(q) (\ddot{x}_d - \hat{x} B_d - \hat{x} K_d) - \dot{J}(q) \dot{q}) + C(q, \dot{q}) \dot{q} + e(q) \quad (5.49)$$

La ley de control descrita en la ecuación 5.46 es representada en el espacio de trabajo con el fin de asegurar el comportamiento del robot en este espacio. Esta ley no puede ser introducida directamente a la dinámica inversa ya que la dinámica se encuentra desarrollada en el espacio articular. Para aplicar esta ley es necesario transformarla al espacio articular, donde al reemplazar a_x en la ecuación 5.47 se puede obtener una ley de control que al ser reemplazada en la ecuación 5.48 que representa la dinámica inversa en el espacio articular se obtiene la ecuación 5.49.

$$\hat{\ddot{x}} - \hat{x} B_d - \hat{x} K_d = 0 \quad (5.50)$$

Al igualar la dinámica del robot con la ley de control se obtiene la ecuación 5.50, donde se observa que es una ecuación de segundo orden la cual regirá el comportamiento de la posición del robot. Además se puede inferir que el error de posición en estado estacionario es 0, lo anterior se debe a que esta ecuación solo se cumple cuando los errores de posición, velocidad y aceleración son nulos.

Como ya se había mencionado el comportamiento del sistema es de segundo orden, por medio de esta afirmación se puede calcular los valores de B_d y K_d . Para el caso del robot SCARA se tienen 4 GDL con lo cual es posible identificar que las matrices B_d y K_d son de tamaño 4×4 y los valores escogidos son las diagonales de estas matrices. Una adecuada selección permite generar un comportamiento deseado por cada grado de libertad en el espacio de trabajo.

Para realizar la tarea de pulido descrita anteriormente y en general para la mayoría de los casos en robótica el comportamiento que se desea en la dinámica es críticamente amortiguado; es decir, con un valor de $\varsigma = 1$. Para lograr este valor en la ecuación de segundo orden se toma un valor de la frecuencia natural de $\omega_n = 5 \text{ Rad/s}$ para cada actuador con el fin de garantizar una velocidad de actuación adecuada por el robot. Con este valor de frecuencia natural se pueden determinar los valores de las matrices B_d y K_d así:

$$B_d = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_d = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Cabe notar que los valores expresados sobre el eje z serán despreciados ya que en este eje el controlador de posición no ejerce ninguna acción.

La trayectoria que se pretende seguir en los ejes x y y es desde el punto $(-0,3 \quad 0,1)$ hasta $(0,1 \quad 0,5)$. Para lo anterior se utiliza un perfil de tipo trapezoidal en velocidad con un tiempo estimado de 2 segundos de recorrido por cada eje. El eje z no estará regido por la ley de posición pero es necesario conocer la ubicación de la superficie la cual está a 0.2m de la base. El grado de libertad de rotación no se mueve, permanece fijo.

La ley de control de fuerza se implementa con la misma estructura utilizada en la ley de control de posición. Las variables de entrada para el control son $f_d, \dot{f}_d, \ddot{f}_d$, estas definirán el perfil de la entrada de fuerza. Es de notar que en la gran mayoría de las aplicaciones la fuerza deseada es constante, lo que conlleva a que las variables f_d, \dot{f}_d sean iguales a 0. Cuando se adquiere la señal del sensor de fuerza esta contiene suficiente ruido para no permitir una diferenciación numérica de la señal pero esta señal es necesaria para el desarrollo del controlador. Con el fin de obtener la \dot{f}_e que será utilizada

en la ley de control de fuerza se debe conocer el modelo del ambiente y de allí realizar la derivada analítica del valor de la fuerza y así para poder parametrizar la ley de control de fuerza de forma correcta es necesario conocer la dinámica del medio en el que el robot interactuará, pues estas dos dinámicas se relacionarán de acuerdo a la ley de control implementada en el robot. Si se desconoce el comportamiento del ambiente no es una tarea fácil alcanzar un comportamiento deseado en el sistema robótico.

Con el propósito de implementar el control de fuerza del robot se plantea un modelo del ambiente en el cual interactuará el robot. En el caso de un ambiente con una superficie deformable se puede simular como un sistema masa-resorte el cual está determinado por la ecuación 5.52 donde K representa la rigidez del sistema, dada en N/m y ΔX representa la diferencia entre la distancia de la superficie x_i y la posición del efector final x_e como se aprecia en la figura 5.13.

$$F = K \Delta X \quad (5.52)$$

$$F = K (x_i - x_f) \quad (5.53)$$

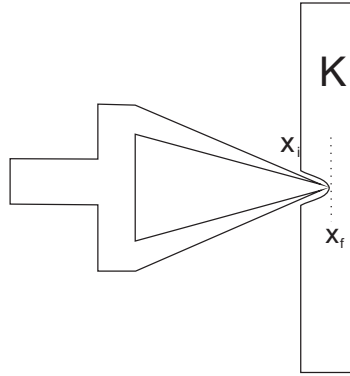


Figura 5.13: Manipulador actuando sobre medio elástico de constante K

La ley de control de fuerza que regirá el robot es propuesta por el Profesor Siciliano [22] y es representada en la ecuación 5.54 donde se utiliza la dinámica inversa como el elemento que linealiza la dinámica del robot.

$$U = a_q + M^{-1}(q) J'(q) (a_f - F_e) \quad (5.54)$$

$$a_f = F_e \quad (5.55)$$

$$a_q = J'(q) M_d^{-1} (-K_d \dot{x}_e + K_p x_F - M_d \dot{J}(q, \dot{q}) q) \quad (5.56)$$

En donde x_F es la variable asociada al error de las fuerzas en la ley de control siendo $x_F = K_f (F_d - F_e)$. Es de notar que en esta ley no se compensan las acciones relacionadas a \dot{x}_F y \ddot{x}_F . Esta ley es conocida como la ley de control de fuerza con lazo de velocidad interno. El inverso del Jacobiano provisto en la ley permite realizar una relación de las variables de fuerza entre el espacio de trabajo y el espacio articular.

Con los valores adecuados de M_d , K_d , K_p , K y k_f se puede obtener un comportamiento de segundo orden en la dinámica del robot. Para analizar el error en estado estable se reemplazan las ecuaciones 5.56 y 5.52 en la ecuación 4.62. Realizando estas operaciones se obtiene la siguiente expresión matemática que representa la dinámica del robot en el eje controlado por fuerza.

$$M_d \ddot{x}_e + K_d \dot{x}_e + K_p K_f K x_e = K_p K_f (K x_i + F_d) \quad (5.57)$$

Al desarrollar el teorema del valor final sobre la ecuación 5.57 se obtiene la expresión 5.58, donde se observa que la F_d siempre alcanza F_e ; es decir, el error es cero.

$$F_d - K(x_i - x_e) = 0 \quad (5.58)$$

Al realizar un análisis con mayor detalle de la ecuación 5.57 se observa que el comportamiento de la dinámica está directamente relacionado con el modelo del ambiente, en este caso por el valor que tome la constante K . La estabilidad del sistema no se ve afectada por el modelo del ambiente siempre que los valores de M_d , K_d , K_p Y K_f se definan positivas. En la figura 5.14 se observa la ley de control de fuerza implementada en Simulink, allí se aprecia que el operador Jacobiano y su derivada poseen como variables de entradas a q y \dot{q} y las variables \dot{x}_e , F_d y F_e que están descritas en el espacio de la tarea. Los valores de los parámetros del sistema de control son matrices diagonales donde cada valor de la diagonal representa el comportamiento en el espacio asociado a este valor. Este esquema se encuentra ubicado dentro del recuadro llamado control fuerza de la figura 5.12

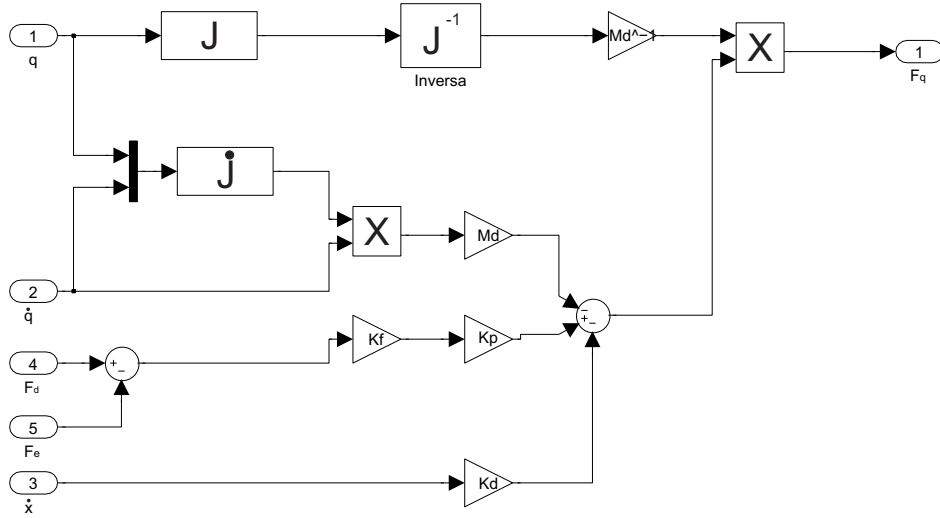


Figura 5.14: Ley de control de fuerza espacio articular

Para el ejemplo que se desarrolla en este capítulo se toma una constante del material de $K = 1000N/m$, esta constante solo se aplicará en el eje z en los otros ejes no se tomarán fuerzas ni de fricción ni de interacción con el medio. La fuerza aplicada es sobre el plano (x, y) en la dirección del eje z y el valor deseado es de $-20N$. Para determinar el comportamiento del sistema se seleccionan valores de la frecuencia natural respecto a los motores de $\omega = 5rad/s$. Para obtener un comportamiento críticamente amortiguado es necesario que $\varsigma = 1$. Al desarrollar la ecuación 5.57 en función de ω y ς se obtiene:

$$m_d = 1; k_f = 0,003; \omega = 5; \varsigma = 1; k = 1000 \quad (5.59)$$

$$2\omega\varsigma m_d = k_d \quad (5.60)$$

$$\omega^2 = k_p k k_f \quad (5.61)$$

$$k_p = \frac{25}{1000 \times 0,003} \times m_d \quad (5.62)$$

$$k_p = 8,33; k_d = 10 \quad (5.63)$$

Donde las matrices asociadas al controlador están dadas por las expresiones 5.64 y 5.65.

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

$$K_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Para observar la diferencia en el comportamiento del robot según la rigidez del medio se plantea realizar el mismo sistema con la k propuesta y una nueva k de 10 KN/m .

Al realizar la simulación con los parámetros anteriormente descritos, con las dos constantes para el medio k y la trayectoria propuesta, se obtienen los perfiles de fuerza en la punta del robot en el eje z . En la figura 5.15 al lado izquierdo se observa la fuerza ejercida por el robot con una constante de $k = 1000 \text{ N/m}$, para esta constante se calculó un comportamiento críticamente amortiguado, el cual se cumple y alcanza el estado estable en aproximadamente 2 segundos. En la figura 5.15 al lado derecho se observa que el comportamiento es subamortiguado de la fuerza ejercida con una constante del medio de $k = 10000 \text{ N/m}$ por el robot, cabe notar que los parámetros del controlador no son cambiados, pero al ser la dinámica del medio diferente el comportamiento también cambiará. En este caso entre mayor sea la rigidez en el medio más oscilatorio será el comportamiento.

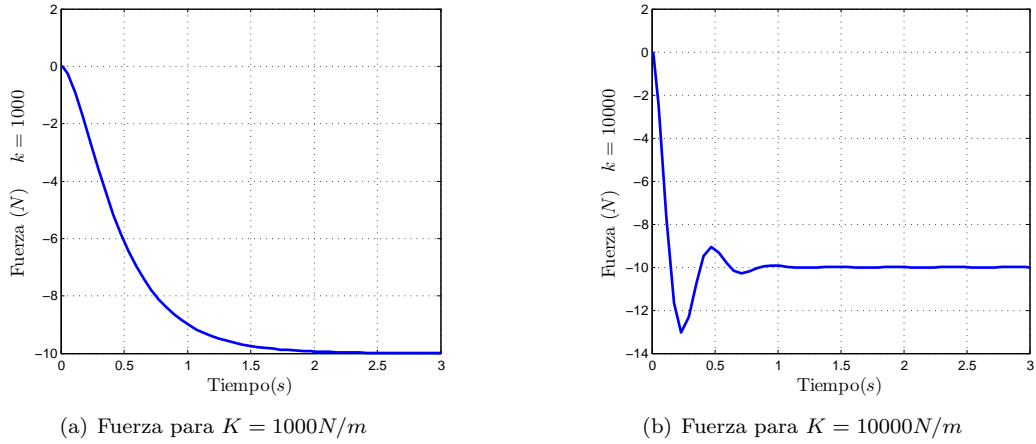


Figura 5.15: Fuerza en el eje z del efector final para una (a) $K = 1000 \text{ N/m}$ y (b) $K = 10000 \text{ N/m}$

Respecto al control de posición en los ejes x y y se obtiene que el error de estado estable es 0 y el seguimiento transitorio de la trayectoria se logra de manera satisfactoria. En la figura 5.16 se observa la posición en cada eje del efector final en el tiempo y en la figura 5.17 el error entre la posición deseada y la medida por cada eje. Como la ley de control en posición no depende de la dinámica del ambiente este no cambia entre los posibles valores de k , allí se observa que el comportamiento de la trayectoria es suavizada y alcanzada en los 2 segundos propuestos.

El control de fuerza híbrido se resume entonces como un control de posición en unos ejes y el control de fuerza en los restantes. Para conocer cuáles son los ejes o planos de acción de cada una de las leyes de control se requiere el conocimiento de las restricciones naturales y las restricciones artificiales. Según estas restricciones se construye la matriz S la cual permite conocer cuales ejes estarán regidos por la ley de fuerza o la de posición. En muchas ocasiones las tareas deben ser divididas en subtareas las cuales tendrán diferentes tipos de restricciones entre cada una de ellas.

Resumiendo entonces se tiene que la ley de control de fuerza para el control híbrido es encontrada de acuerdo a la dinámica del ambiente; es decir, para cada modelo de ambiente se debe plantear una

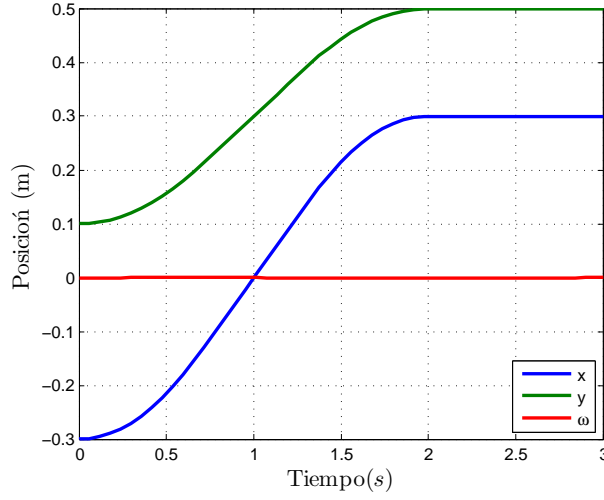


Figura 5.16: Posición del efector final para una $K = 1000N/m$ y $K = 10000N/m$

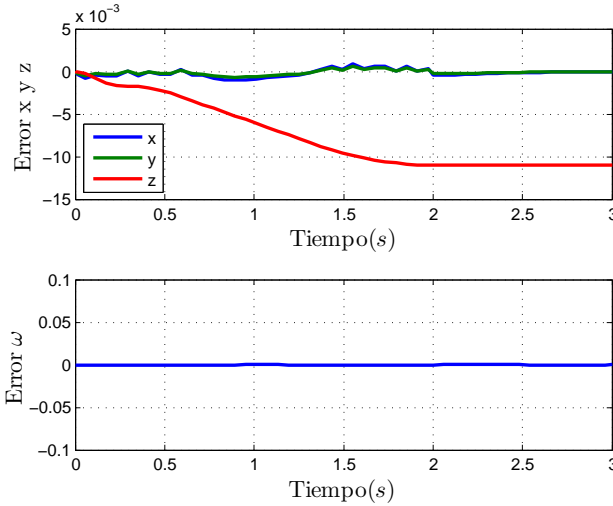


Figura 5.17: Error de posición del efector final para $K = 1000N/m$ y $K = 10000N/m$

ley de control diferente y la parametrización de los valores dependerá de las características propias del ambiente. Para el control de impedancia, el cálculo de la ley depende en menor medida del modelo del ambiente. Para parametrizar esta ley de control de forma adecuada es necesario conocer las características del ambiente. Una de las principales diferencias entre los dos controladores es en control directo de la fuerza, ya que el control de impedancia relaciona la fuerza medida con la posición del efector final.

Al completar este capítulo se adquiere el concepto de control híbrido (fuerza-posición) y control de impedancia los cuales serán utilizados en el escenario de corte de rebaba de sillas plásticas. Este escenario tendrá un modelo de ambiente totalmente diferente a los estudiados en este capítulo y será una forma de parametrización basada en el modelo encontrado. Este tópico y la evaluación de las técnicas serán tratados en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

SIMULACIÓN EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS PARA EL PROCESO DE CORTE DE REBABA

El propósito de este capítulo es generar un análisis comparativo entre el control de impedancia y el control híbrido aplicado a un proceso de corte de rebaba utilizando varios índices de desempeño. En la primera sección se presenta la simulación de la trayectoria de corte para la silla plástica. La trayectoria está dividida en 19 trayectos. Cada trayecto contiene un perfil de velocidad tipo trapezoidal. En la segunda sección se exponen 3 tipos de modelos de rebaba posibles, en relación con el perfil de la variable viscosa de la rebaba. El primer perfil es de tipo paso, el segundo de tipo trapezoidal y el tercero triangular. En la tercera sección se desarrolla la simulación del corte de la rebaba para los tres tipos de perfil sobre una trayectoria específica utilizando un control de impedancia. La cuarta sección muestra la simulación utilizando un control híbrido (fuerza-posición). Finalmente, en la quinta sección la comparación de desempeño entre los controladores con los 3 tipos de rebaba, es llevada a cabo utilizando diferentes índices de desempeño. Para cada uno de los índices se desarrolla un análisis del comportamiento según los valores obtenidos.

6.1 Creación de la trayectoria

Como ya se había mencionado una de las motivaciones para realizar este estudio fue el problema industrial de corte de rebaba en una silla plástica. Esta silla está diseñada para satisfacer las necesidades del transporte urbano. La forma de producción de las sillas se selecciona con base en las especificaciones requeridas. Lo primero que se realiza es la obtención de las materias primas, polietileno de alta densidad y colorante Masterbatch. Después de realizar el mezclado entre el colorante y el polietileno, la máquina de extrusión-soplado se alimenta con la mezcla. El proceso de extrusión-soplado consta de la inyección de un parison, el cual es una lámina de plástico tubular dentro de las caras del molde abierto, el siguiente paso es el cierre del molde el cual genera una bolsa de polietileno. El proceso continua con la inyección de aire en la bolsa donde esta tomará la forma del molde que la contiene. Una cantidad importante de material queda por fuera del molde, ya que es necesario garantizar la hermeticidad de la bolsa que se genera dentro del molde; es decir, la silueta del molde debe ser menor que el tamaño del parison. Por esta característica de producción se generan excesos de material sobrante (Rebaba), la cual debe ser retirada de tal forma que se obtenga un buen acabado superficial sobre el producto final. Para retirar la rebaba se hace necesario conocer en detalle la geometría de la silla. Como este tipo de información se considera sensible dentro de las compañías productoras, se realiza el levantamiento de las medidas aproximadas de la parte superior de una silla instalada en el sistema de transporte masivo. La geometría de la silla es observada en la figura 6.1, esta silla cuenta con tres agujeros, dos curvas y tres superficies rectas. Las dimensiones están expresadas en milímetros.

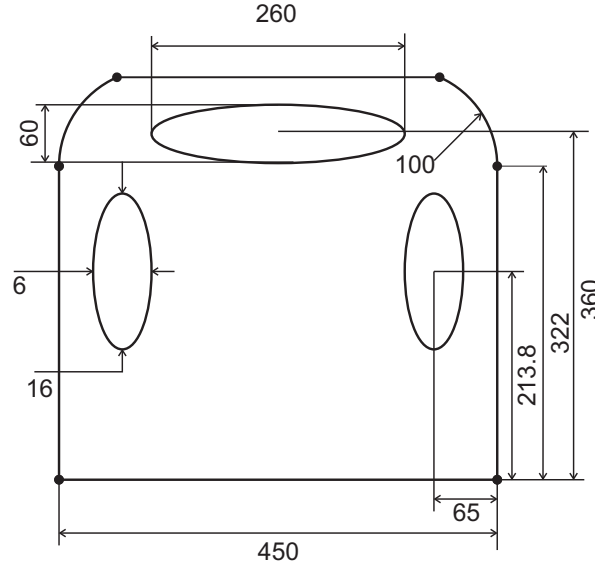


Figura 6.1: Medidas de las líneas de corte de rebaba en una silla plástica (mm)

Para parametrizar la trayectoria de movimiento que el robot debe seguir se utiliza el algoritmo de segmentos lineales con mezclas parabólicas (LSPB, por sus siglas en inglés). Este algoritmo está basado en la creación de un perfil de velocidad de tipo trapezoidal, el cual está formado por tres partes. La primera parte hace referencia a la rampa de ascenso, la cual permite alcanzar la velocidad de cruce. En la segunda parte mantiene la velocidad constante, normalmente esta sección es conocida como velocidad de cruce y la tercera parte es la rampa de descenso, la cual permite reducir la velocidad de cruce a una velocidad final. Los tiempos asociados a los tramos del perfil trapezoidal son: Para el primer tramo, el tiempo de subida $[0, t_s]$; para el segundo, el tiempo de cruce $[t_s, t_f - t_s]$ y finalmente para el tercero, el tiempo de descenso $[t_f - t_s, t_f]$. La ecuación 6.1 hace referencia al perfil de posición entre los puntos q_0 y q_f definida con los tiempos antes mencionados. En dicha ecuación la velocidad de cruce (constante) está representada por la letra V y la aceleración por α durante la trayectoria está dada por $\frac{V}{t_s}$.

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{\alpha}{2} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{q_f + q_0 - V t_f}{2} + V t & \text{si } t_b < t \leq t_f - t_b \\ q_f - \frac{\alpha t_f^2}{2} + \alpha t_f t - \frac{\alpha}{2} t^2 & \text{si } t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases} \quad (6.1)$$

Para elaborar los perfiles de posición, velocidad y aceleración según el método LSPB es necesario conocer los puntos iniciales y finales de la trayectoria. Estos puntos son determinados por la silueta de corte de la silla la cual es observada en la figura 6.1. Los puntos iniciales, finales y la dirección de la trayectoria se observan en la figura 6.2. Como se percibe en la figura 6.2 la tarea de corte de rebaba está dividida en 19 subtareas las cuales se describen de la siguiente manera:

1. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_0 y q_1 (proceso)
2. Trayectoria de rotación. Giro de -90° sobre el punto q_1 (proceso)
3. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_1 y q_2 (proceso)
4. Trayectoria segmento de círculo entre los puntos q_2 y q_3 (proceso)
5. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_3 y q_4 (Corte)

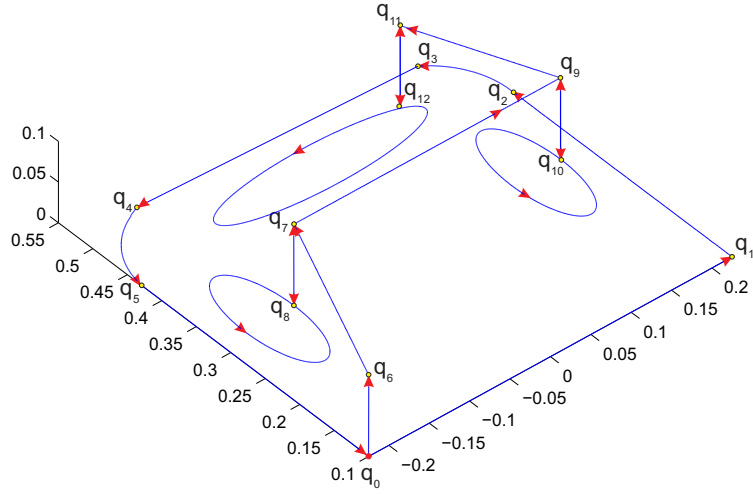


Figura 6.2: Planeación de la trayectoria y medidas de una silla para efectos de corte (mm)

6. Trayectoria segmento de círculo entre los puntos q_4 y q_5 (proceso)
7. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_5 y q_0 (proceso)
8. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_0 y q_6 (ubicación)
9. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_6 y q_7 (ubicación)
10. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_7 y q_8 (perforación)
11. Trayectoria en ovalo 1 desde el punto q_8 (corte)
12. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_8 y q_7 (ubicación)
13. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_7 y q_9 (ubicación)
14. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_9 y q_{10} (perforación)
15. Trayectoria en ovalo 2 desde el punto q_{10} (corte)
16. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_{10} y q_9 (ubicación)
17. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_9 y q_{11} (ubicación)
18. Trayectoria en línea recta entre los puntos q_{11} y q_{12} (perforación)
19. Trayectoria en ovalo 3 desde el punto q_{12} (corte)

De las 19 subtarefas 4 son de corte, 3 de perforación y 12 de seguimiento, lo que permite conocer que existe una interacción de fuerzas entre el efector final del robot y la silla en las subtarefas 5, 10, 11, 14, 15, 18 y 19 (corte y perforación). En la figura 6.3(a) se observa el perfil de la trayectoria en el espacio de trabajo contra el tiempo, en la parte superior se encuentran las posiciones de los ejes x , y y z en metros y en la inferior se encuentra el ángulo en radianes sobre el eje z del efector final. En esta gráfica se aprecia que toda la trayectoria es suave; es decir, no contiene cambios bruscos de posición.

Para conocer el movimiento que realizarán los actuadores del robot, es necesario utilizar la cinemática inversa en la trayectoria que se seguirá y así determinar los posibles cambios abruptos que podrían realizar los actuadores. En la figura 6.3(b) se observan los perfiles de posición de los actuadores. En esta gráfica se detalla que los movimientos de las articulaciones se realizan de forma suave y continua durante el tiempo de ejecución de la tarea.

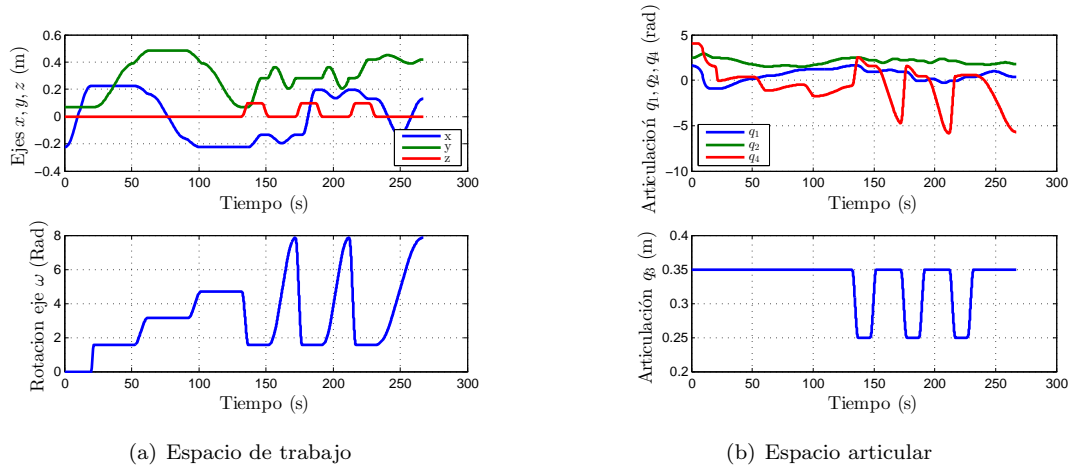


Figura 6.3: Perfil de posición para una silla (a) en el espacio de trabajo (b) en el espacio articular

El perfil de velocidad de la trayectoria para cada eje se presenta en la figura 6.4(a). Para cada eje por cada sección de corte se presenta un perfil de tipo trapezoidal. Cada trapezoide presenta un tiempo de crecimiento, un tiempo de cruce y un tiempo de decrecimiento. En la figura 6.4(b) se muestran los perfiles de aceleración para cada eje, que varían en pasos constantes. Este tipo de perfil no es muy deseado, ya que en la ejecución de cada subrutina la aceleración cambia abruptamente al inicio y al fin de las mismas. Por ejemplo, si se halla el jerk, que representa el cambio de la aceleración en el tiempo, valores que tienden a infinito pueden ser asociados al inicio y fin de cada subrutina. En términos mecánicos, estos cambios se ven reflejados en una corta vida útil de los actuadores; es decir, entre mayor sea el valor del jerk menor será la vida útil del actuador.

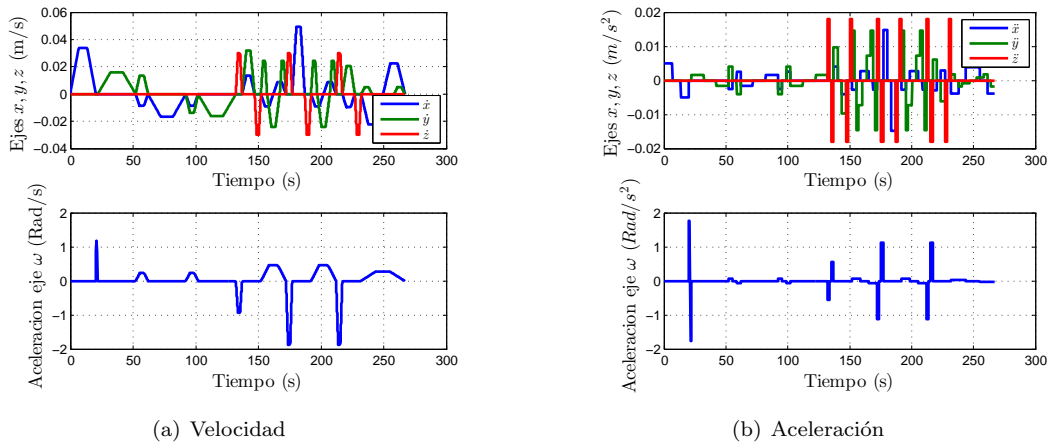


Figura 6.4: Perfil de (a) velocidades y (b) aceleraciones para la trayectoria corte de rebaba

6.2 Modelado de la fuerza de corte (Ambiente)

Con el fin de realizar el control de fuerza de un robot es necesario conocer el modelo del ambiente donde el robot va a interactuar. Existen diferentes metodologías para encontrar modelos que se relacionen con el ambiente [10]. La metodología fundamental admite las ecuaciones de la física y reconoce sus axiomas para formar una lógica de construcción del modelo. Por su parte, la metodología empírica, se

basa en la observación directa de los fenómenos. En este caso, se buscan ecuaciones matemáticas que se ajusten a las mediciones. Uno de los modelos más utilizados para simular la dinámica del ambiente es el sistema masa–resorte–amortiguador, el cual se observa en la figura 6.5. Al ser estimulado con una fuerza externa, la respuesta del sistema dependerá de las características de la masa, el resorte y el amortiguador. Este tipo de sistema ha sido ampliamente estudiado y se han propuesto diversos modelos matemáticos que asimilan su comportamiento dinámico. Uno de estos modelos, basado en la disipación de energía, plantea un sistema de segundo orden en el cual los cocientes del sistema son formados con las características físicas de la masa, el resorte y el amortiguador. Este tipo de modelo es ampliamente utilizado en la ingeniería, ya que es posible generar diversos tipos de comportamiento al variar los parámetros del modelo.

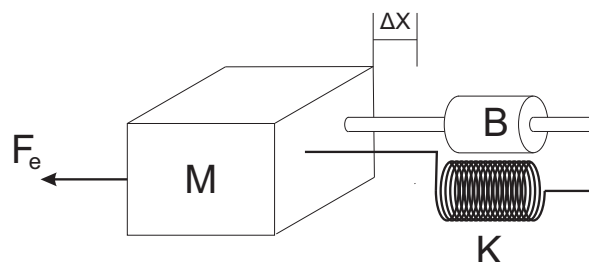


Figura 6.5: Sistema masa–resorte–amortiguador, estimulado por fuerza externa

En la robótica cuando se utiliza el control de fuerza siempre se hace referencia a la dinámica del medio. Uno de los ambientes más utilizados es el deformable, el cual se basa en la ecuación que describe la fuerza ejercida por un resorte. Spong la define como $F = kx$ [23], Siciliano como $f_e = K(x_e - x_r)$ [22] y Craig como $f_e = K_e x$ [5]. Cabe notar que se requiere un amplio conocimiento del ambiente para determinar la ley de control. En la sección 5.3 el ejemplo utilizado toma este tipo de modelo para realizar el control de fuerza y se demuestra que desconocer la dinámica del medio, hace del control de fuerza una tarea difícil de lograr.

El primer modelo que se planteó en este trabajo de tesis para el corte de rebaba fue el expuesto por los anteriores autores donde la fuerza externa es dada por $f_e = K_p \delta x$. Al analizar este modelo se aprecia que la fuerza ejercida por el ambiente es directamente proporcional a la diferencia de la posición final respecto a la posición inicial del efector final. Para efectos prácticos del modelo de fuerza, es necesario que ésta no dependa directamente de la posición del efector final en el corte. Debido a esto se resuelve no utilizar este modelo. Para encontrar un modelo de corte de plásticos se deben tener en cuenta ciertas variables de los materiales como el módulo de elasticidad del polímero, la temperatura de manufactura, la herramienta utilizada para generar el corte, el área de la superficie de corte, el factor de cristalinidad del material y el índice de fluencia. Generalmente conocer todas estas variables es una tarea difícil y requiere de gran cantidad de experimentación y ajuste de modelos matemáticos que pueden ser muy complejos.

Una forma de simplificar el modelo de corte de la rebaba en una silla plástica es utilizar un modelo viscoso el cual está asociado a la velocidad de corte en el robot. Un modelo viscoso descrito matemáticamente es,

$$F_e = b_p \dot{x} \quad (6.2)$$

Donde el parámetro b_p representa la interacción entre las variables del material antes mencionadas. Se asumen temperatura ambiente de manufactura al momento del corte y variables del material constantes. La única variable no constante, que varía respecto a la posición, es el área de corte asociada a la no uniformidad de la rebaba en la trayectoria, en donde, \dot{x} es la velocidad del efector final en dirección perpendicular al área de corte, en el espacio de la tarea. La variable b_p es conocida como el coeficiente de viscosidad dinámico y sus unidades son típicamente Pascales por segundo ($Pa.s$). El valor máximo de b_p para el corte de rebaba es de 1150 aproximadamente, este valor es asumido para realizar la parametrización de los dos controladores.

La ecuación 6.3 representa el modelo de fuerza utilizado para el desarrollo de esta tesis tanto para el control de impedancia, como para el control híbrido. La forma de representar los cambios de la dinámica debido a la rebaba se logran creando 3 tipos de perfiles para la variable b_p . El primer perfil es de tipo paso como el observado en la figura 6.6(a), donde la rebaba aparece abruptamente en su totalidad y desaparece de la misma forma. El segundo perfil es de tipo trapezoidal, figura 6.6(b), donde la constante del medio crece de manera lineal hasta alcanzar el valor máximo, allí se mantiene por un tiempo; después, desaparece de forma lineal hasta llegar a cero. El tercer tipo de perfil es de forma triangular, figura 6.6(c), donde la constante crece de manera lineal hasta alcanzar un valor máximo e instantáneamente decrece de manera lineal hasta llegar a cero nuevamente.

$$f_e = b_p \dot{x} \quad (6.3)$$

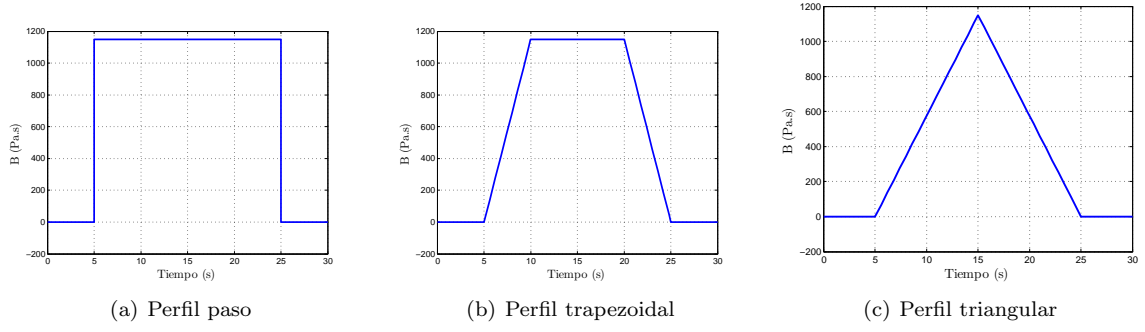


Figura 6.6: Tipos de perfiles de rebaba.

Estos perfiles permitirán conocer el comportamiento de los controladores cuando la dinámica del medio está cambiando, además se pretende que en el inicio del perfil no exista rebaba y de igual manera suceda al finalizar la trayectoria. Debido a la forma de fabricación de la silla plástica solo existe rebaba en las 3 agarraderas, en la parte inferior y la parte superior de la silla. Se selecciona una trayectoria que incluye la rebaba, la subtask que cumple esta característica es la línea de la parte superior de la silla. En esta trayectoria se simulará la primera y la última parte sin rebaba y en el medio se implementa cada uno de los perfiles de rebaba. En la figura 6.7 la línea de color rojo es la trayectoria escogida para realizar la simulación.

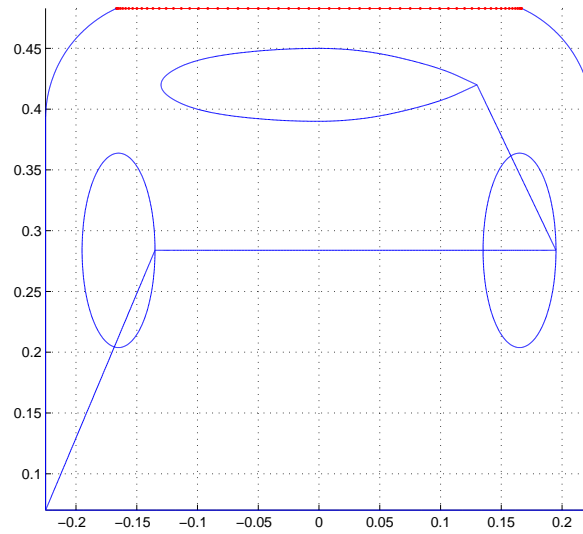


Figura 6.7: Trayectoria de estudio de formada por asteriscos.

6.3 Simulación con Control de Impedancia

Para realizar el corte de rebaba de una silla plástica por medio de un robot industrial se plantea un control de impedancia con dinámica inversa el cual está regido por la ley de control representada en la ecuación 6.6. El comportamiento de la ley de control está regido por los parámetros I_d , B_d y K_p de la ecuación 6.4. Con el fin de determinar estos parámetros según el comportamiento deseado es necesario incluir el modelo de la fuerza. Al reemplazar las ecuaciones 6.5 y 6.4 en la ecuación 6.6 y luego esta en el modelo del robot, descrito en la ecuación 5.3, se obtiene la ecuación 6.7.

$$a_x = \ddot{x}_e - I_d^{-1} (B_d \dot{\hat{x}} + K_d \hat{x} + F) \quad (6.4)$$

$$a_f = F \quad (6.5)$$

$$u = M(x) a_x + C(x, \dot{x}) \dot{x} + e(x) + a_f \quad (6.6)$$

$$I_d \ddot{x}_e + (B_d + B_m) \dot{x}_e + K_p x_e = K_p x_d \quad (6.7)$$

Esta ecuación es de segundo orden y se pretende que su comportamiento sea subamortiguado, lo cual es alcanzado si se tiene un $\varsigma = 1$. Para ello se toma como frecuencia natural $\omega = 5$. Con estos valores se despejan los parámetros de las ecuaciones 6.8 a 6.11 y se asume un valor de k_p suficientemente grande para rechazar las pequeñas perturbaciones respecto a las variaciones del ambiente.

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_{px}}{m_x}} \quad \varsigma = \frac{b_x - b_{mx}}{2 \sqrt{m_x k_{px}}} \quad (6.8)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_{py}}{m_y}} \quad \varsigma = \frac{b_y}{2 \sqrt{m_y k_{py}}} \quad (6.9)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k_{pz}}{m_z}} \quad \varsigma = \frac{b_z}{2 \sqrt{m_z k_{pz}}} \quad (6.10)$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{k_{p\alpha}}{m_\alpha}} \quad \varsigma = \frac{b_\alpha}{2 \sqrt{m_\alpha k_{p\alpha}}} \quad (6.11)$$

Donde se obtiene:

$$I_d = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 2350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1200 \end{pmatrix} \quad K_p = \begin{pmatrix} 3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Al realizar la simulación con los parámetros encontrados, la trayectoria definida y el perfil tipo paso para la variable b_p se obtiene un perfil de fuerza ejercida por el robot como el observado en la figura 6.8(a), donde en los primeros 5 segundos no existe rebaba, allí la fuerza se mantiene en 0. A los 5 segundos aparece el 100 % de la rebaba de forma instantánea, en este instante la fuerza crece hasta $-9,65 \text{ N}$ y después crece de manera lineal de la misma forma que el perfil de velocidad en el eje x hasta los 10 segundos. En dicho punto, la fuerza llega a un valor de $-19,25 \text{ N}$ con una oscilación de $0,3 \text{ N}$ y se mantiene de esta forma hasta los 20 segundos, donde la fuerza empieza a decrecer con la misma forma que el perfil de velocidad hasta los 25 segundos donde tiene un valor de $-10,25 \text{ N}$ y después la fuerza desaparece de manera súbita manteniéndose así hasta los 30 segundos.

Al realizar la simulación con un perfil de tipo trapezoidal se obtiene un perfil de fuerza como el mostrado en la figura 6.8(b). Al igual que en el anterior perfil de fuerza en los primeros 5 segundos al igual que en los últimos 5 no existe fuerza de interacción, después de los 5 segundos la fuerza crece de manera lineal hasta los 10 segundos alcanzando un valor de $-19,1 \text{ N}$, este valor se mantiene con

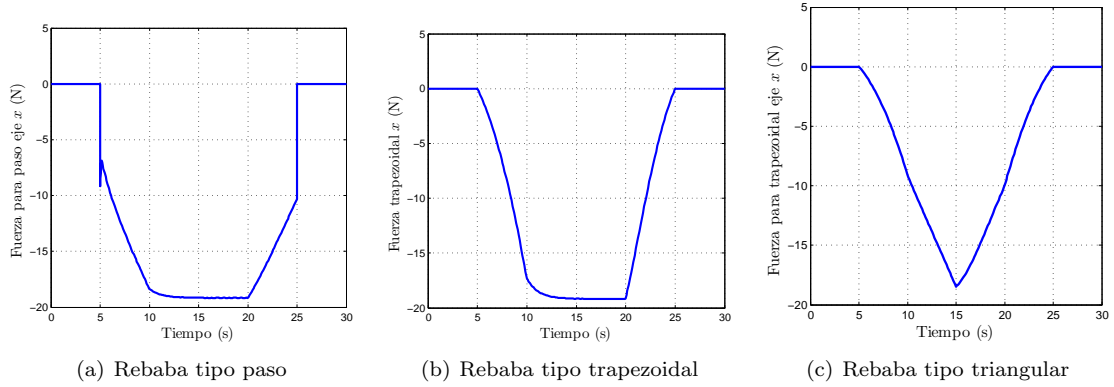


Figura 6.8: Perfil de fuerza obtenido del control de impedancia con rebaba (a) tipo paso, (b) tipo trapezoidal y (c) tipo triangular en el eje x .

una oscilación de $0,2\text{ N}$ hasta los 20 segundos, posteriormente la fuerza empieza a decrecer de manera lineal hasta llegar a 0 a los 25 segundos, después la fuerza se mantiene en 0 hasta los 30 segundos. Al simular con el perfil tipo triangular se obtiene una fuerza como la observada en la figura 6.8(c) donde los primeros y últimos 5 segundos la señal de fuerza son 0, después de los 5 segundos la fuerza crece de manera lineal hasta alcanzar una fuerza máxima de $-18,5\text{ N}$ a los 15 segundos, inmediatamente después la fuerza empieza a decrecer de manera lineal hasta llegar a 0 a los 25 segundos.

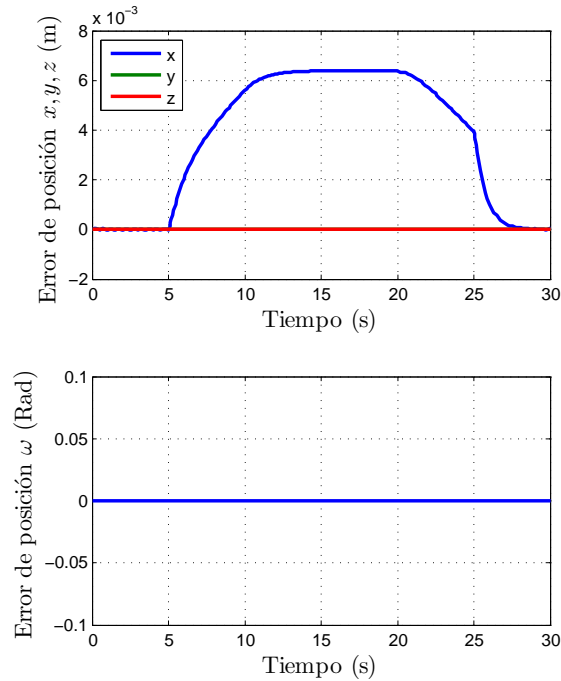


Figura 6.9: Rebaba tipo paso

Al analizar la figura 6.9 que representa el error de posición en el espacio de trabajo del robot con rebaba de tipo paso, se obtiene un error en el eje x de aproximadamente $0,04\text{ mm}$, en ausencia de rebaba (los primeros 5 segundos). El error crece hasta alcanzar un valor de $6,39\text{ mm}$. Este error de posición está asociado a la interacción del robot con la rebaba que está presente durante 20 segundos

en la trayectoria. Al desaparecer la rebaba, a los 25 segundos, el error decrece hasta alcanzar el mismo valor de error que en el inicio. En los ejes y , z y ω el error de posición es de aproximadamente 0, este tipo de comportamiento es esperado ya que el controlador definido para estos ejes alcanza la posición deseada. Este comportamiento es idéntico para los demás perfiles de rebaba, ya que la rebaba solo está presente en el eje x .

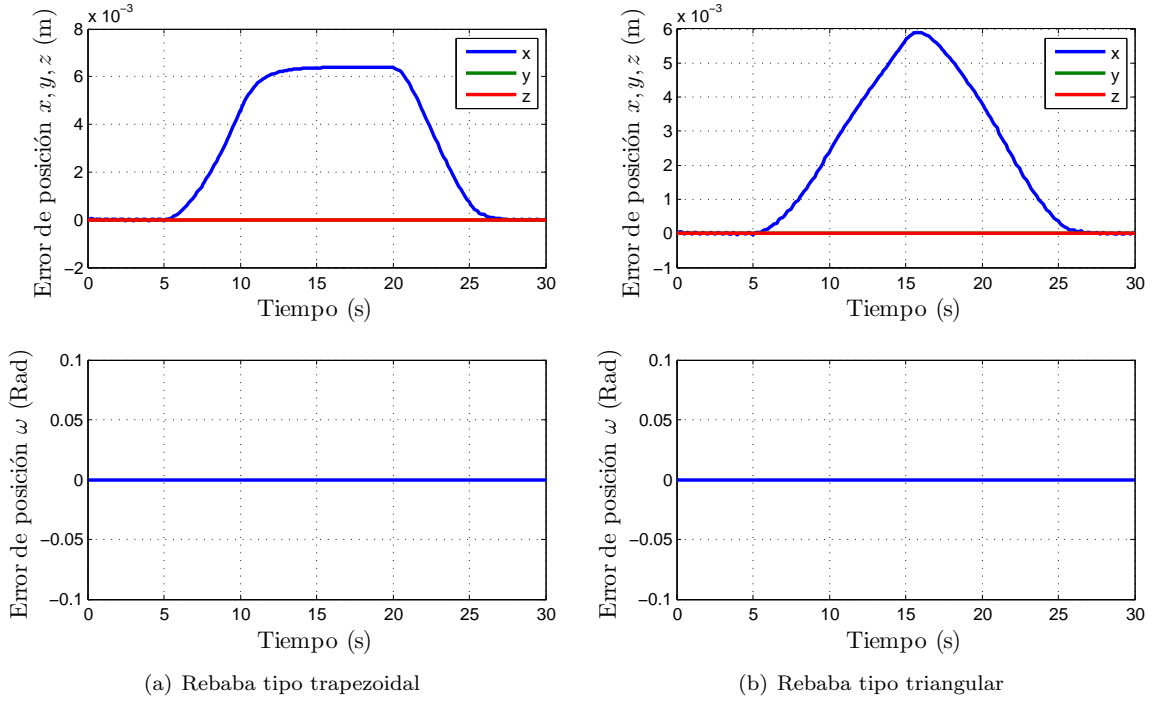
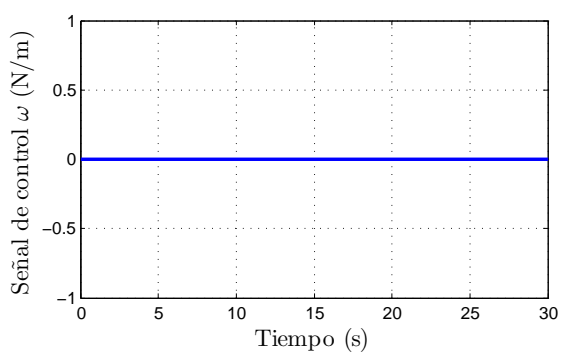
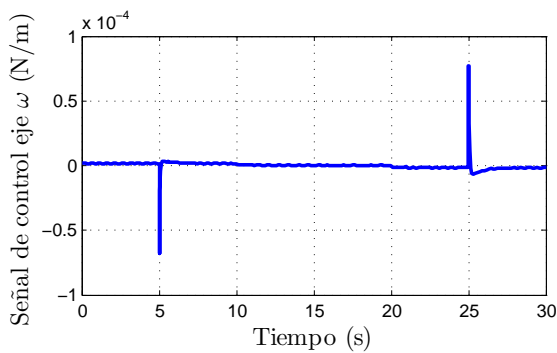
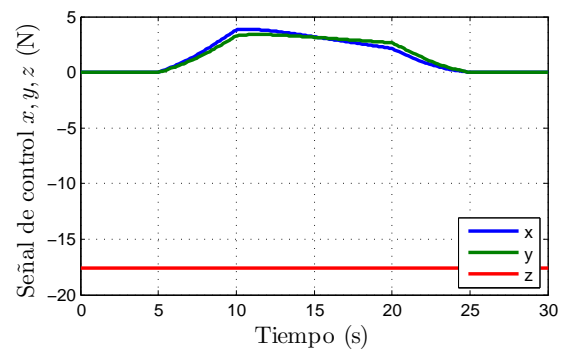
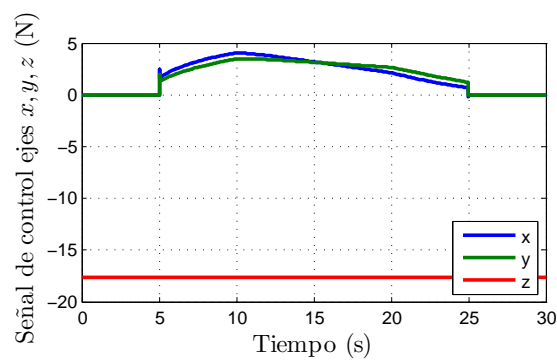


Figura 6.10: Perfil del error en posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a)trapezoidal y (b)triangular.

En la figura 6.10(a) se representa el error de posición en el eje x con un perfil de rebaba trapezoidal y la figura 6.10(b) con un perfil triangular. Se observa que cuando la rebaba es de tipo trapezoidal el error crece de manera más lenta pero alcanza el mismo valor que la de tipo paso, un comportamiento similar se nota en el decrecimiento. Cuando la rebaba es de tipo triangular el error se comporta de forma triangular y alcanza un valor máximo de $5,9 \text{ mm}$ a los $15,8$ segundos.

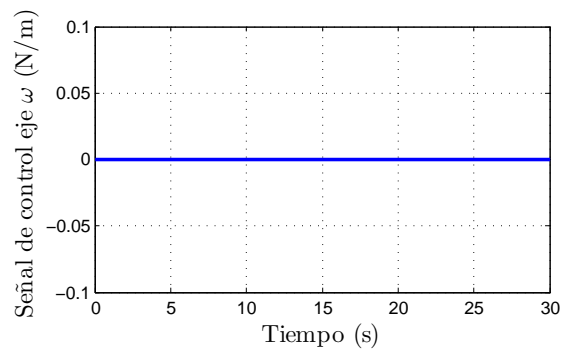
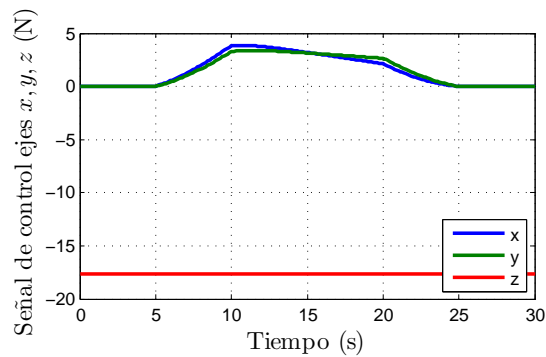
En la figura 6.11(a) se observa la señal de control que estimula el robot en los primeros y en los últimos 5 segundos para los tres modelos de rebaba, esta señal es pequeña ya que el modelo dinámico del robot no cuenta con los términos de las fricciones y por la arquitectura de construcción del robot, el movimiento en los ejes x y y no es afectado por la fuerza de la gravedad. Después de 5 segundos el robot empieza a cortar la rebaba en un perfil paso y la acción de control en el eje x toma un pico de $2,49 \text{ N}$ y después crece hasta un valor de $4,05 \text{ N}$, este valor sucede a los 10 segundos. Después la señal empieza a decaer hasta los 25 segundos. En el eje y el comportamiento es similar con el cambio de los valores pico y máximo siendo estos de $1,94 \text{ N}$ y $3,48 \text{ N}$.

Cuando la rebaba es de tipo trapezoidal el comportamiento obtenido de la señal de control es el observado en la figura 6.11(b); donde, después de 5 segundos las señales en los ejes x y y m que se comportan de manera similar, crecen de manera lineal hasta alcanzar los valores de $3,87 \text{ N}$ en el eje x y $3,4 \text{ N}$ en el eje y . Luego la señal decrece levemente durante 10 segundos, al llegar a los 20 segundos la señal disminuye rápidamente hasta llegar a 0 a los 25 segundos. El eje Z tiene una señal de control constante de $-17,63 \text{ N}$ que corresponde a la fuerza necesaria para vencer la acción de la gravedad y así mantener el eslabón en una posición constante. En el eje ω la señal de control es aproximadamente 0.



(a) Rebaba tipo paso

(b) Rebaba tipo trapezoidal



(c) Rebaba tipo triangular

Figura 6.11: Señal de control para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular.

La señal de control del robot debida a una rebaba tipo triangular se observa en la figura 6.11(c). Se observa que en los ejes x y y la señal de control se comporta de igual manera, presentando una geometría triangular con valor máximo de 3 N . El comportamiento de la fuerza aplicada con un control de impedancia para los 3 tipos de rebaba trata de seguir el perfil de la velocidad deseada y las señales de control se encuentran dentro de los valores admisibles para los actuadores del robot. Los errores de posición son aceptables para la aplicación, pues no superan el valor de $0,01\text{ mm}$ en los ejes y, z y ω .

6.4 Simulación utilizando Control Híbrido

Con el mismo escenario de simulación planteado en la sección anterior se evalúa el control híbrido. La dinámica del robot en el espacio de trabajo es la misma descrita en la ecuación 6.6. Como ya se ha mencionado una de las diferencias entre el control de impedancia y el control híbrido es que el control híbrido controla de forma directa la variable de fuerza, cosa que no sucede en el control de impedancia.

Prosiguiendo con la implementación de una ley de control que alcance el objetivo de seguir una fuerza deseada, se propone utilizar aquella mostrada en la ecuación 6.13. Se pretende que la ley se ajuste al modelo del ambiente dado por $F_e = b_p \dot{x}$. La ley utilizada en la sección 5.3 no funcionará correctamente para este modelo de ambiente, pues está diseñada para un ambiente deformable y el modelo del ambiente para el corte de rebaba es viscoso. Así, la ley de control que se propone para este modelo está dada por el error de la fuerza multiplicada por una constante como puede verse en la ecuación 6.13.

$$a_x = x_f (F_d - F_e) \quad (6.13)$$

Para encontrar un control híbrido adecuado, es necesario conocer las restricciones naturales y artificiales de la tarea. Para conocer estas restricciones se realiza un análisis geométrico de la tarea de corte de rebaba sobre la trayectoria a simular. Esta trayectoria, como se mencionó anteriormente, es la parte superior de la silla donde se encuentra la mayor parte de la rebaba. Se hallan las siguientes restricciones naturales sabiendo que la dirección de corte es en el eje x :

$$\begin{aligned} v_y &= 0 & f_y &= 0 \\ \omega_x &= 0 & n_z &= 0 \\ \omega_z &= 0 & n_x &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Y las siguientes restricciones artificiales:

$$\begin{aligned} v_z &= 0 & f_z &= 0 \\ v_x &= \text{Perfil} & n_y &= 0 \\ \omega_y &= 0 & f_x &= \text{cte.} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Teniendo identificadas las restricciones del sistema es posible determinar la matriz S , la cual permite disgregar el control de posición del control de fuerza. Como se observa en las restricciones artificiales el único espacio controlado en fuerza es el eje x , con esto, es posible determinar la matriz S y $I - S$ como:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

El siguiente paso para lograr el control híbrido es determinar una ley de control en posición para los ejes que se rigen bajo esta ley. La ley de control en posición que se implementa es un controlador

de tipo PD, el cual es representado en la ecuación 6.17 y es sintonizado para que tenga una respuesta críticamente amortiguada. Remplazando las ecuaciones 6.17 y 6.18 en 6.19 se logra el control de posición para el control híbrido.

$$a_x = \ddot{x} - (B_d \hat{\dot{x}} + K_d \hat{x}) \quad (6.17)$$

$$a_f = F \quad (6.18)$$

$$U = M(x) a_x + C(x, \dot{x}) \dot{x} + e(x) + a_f \quad (6.19)$$

Donde los valores de las matrices B_d y K_P son:

$$B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad K_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Con el control de posición explicado se implementa la ley de control de fuerza descrita en la ecuación 6.13 donde,

$$\ddot{x} = a_f \quad (6.21)$$

$$a_f = x_f (F_d - F_e) \quad (6.22)$$

Al analizar la estabilidad de la ecuación 6.22, se encuentra que la matriz x_f debe ser definida positiva y el error de estado estable de la fuerza es calculado teniendo en cuenta el modelo del ambiente mostrado en la ecuación 6.23,

$$F_e = b_p \dot{x} \quad (6.23)$$

$$\ddot{x} = x_f (f_d - f_e) \quad (6.24)$$

$$\dot{f}_e = b_p x_f (f_d - f_e) \quad (6.25)$$

$$\dot{f}_e + b_p x_f f_e = b_p x_f f_d \quad (6.26)$$

$$f_e = f_d \quad (6.27)$$

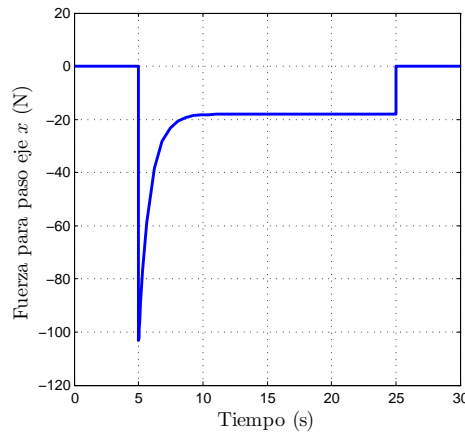


Figura 6.12: Perfil de la fuerza en el espacio de trabajo para rebaba de tipo paso con control híbrido.

Donde se cumple que en el estado estable el sistema alcanza el valor de la fuerza deseada. Como se observa en la ecuación 6.26, el comportamiento de la fuerza puede ser caracterizado por un sistema de

primer orden donde, $b_p x_f$ es conocida como la constante de tiempo. El valor de B es la constante del medio la cual toma tres tipos de perfiles para los valores: un perfil tipo paso, un perfil tipo trapezoidal y un perfil tipo triangular. Para obtener el valor máximo de los perfiles se mide el corte de la rebaba cuando se hace de forma manual y de allí se saca el promedio del valor máximo de la constante b_p siendo este de 1150 *Pa.s*. Multiplicado por la constante x_f se obtiene el tiempo de respuesta del sistema. Para obtener una constante de tiempo de 1,15 segundos se determina un valor de $x_f = 0,001$ para una fuerza de corte deseada de -18 N .

Teniendo el escenario de simulación determinado, se realiza la simulación con un perfil de rebaba tipo paso donde se obtiene una señal de fuerza en el eje x representado en la figura 6.12, allí se observa que a los 5 segundos la fuerza toma un valor pico de -103.1 N y se estabiliza a los 10 segundos en un valor de -18 N , este valor se mantiene constante hasta los 25 segundos donde la rebaba desaparece súbitamente y la fuerza se hace 0.

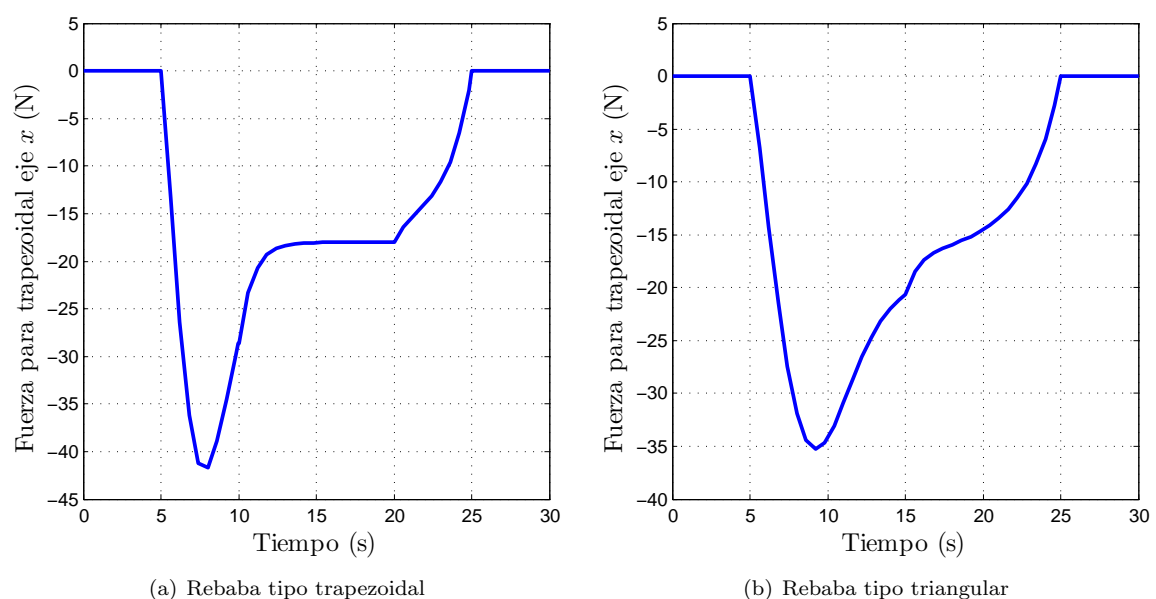


Figura 6.13: Perfil de la fuerza en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) trapezoidal y (b) triangular con control híbrido

La figura 6.13(a) muestra el perfil de fuerza del efector final debido a una rebaba tipo trapezoidal, se observa que la fuerza ya no crece de manera brusca a los 5 segundos sino que esta lo hace durante 3 segundos hasta alcanzar un valor pico de -41.71 N , allí la señal empieza a disminuir y llega al valor de los -18 N este valor se mantiene constante hasta los 20 segundos donde la fuerza empieza a decaer hasta llegar a 0 a los 25 segundos de la trayectoria.

Por último en la figura 6.13(b) se observa la fuerza generada por un perfil de tipo triangular. Esta crece hasta llegar a -35.25 N y tarda 9.2 segundos en llegar a este valor, allí el perfil empieza a decrecer de forma logarítmica y en los 15 segundos este tiene un punto de inflexión y sigue el decrecimiento de forma exponencial hasta llegar a cero a los 25 segundos.

Ahora, se analizan los errores de posición para los diferentes perfiles de rebaba. En la figura 6.14 se aprecian los errores de posición en los ejes y , z y ω para los 3 tipos de perfiles. Esta señal se encuentra en el orden de 1×10^{-13} por lo cual, para efectos prácticos puede considerarse despreciable.

El error de posición en el eje x para los perfiles tipo paso, trapezoidal y triangular se observa en la figura 6.15. Aquí se percibe que en los 3 tipos de rebaba el comportamiento es similar. Cabe aclarar, que la señal de referencia en posición es la que seguiría el robot si éste eje estuviera controlado en posición. Además, esta figura muestra que si la rebaba es de tipo paso, el sistema realiza la tarea de corte con mayor velocidad, lo que se deduce al apreciar que el error de posición en estado estacionario es menor en este caso, que en los otros 2 perfiles.

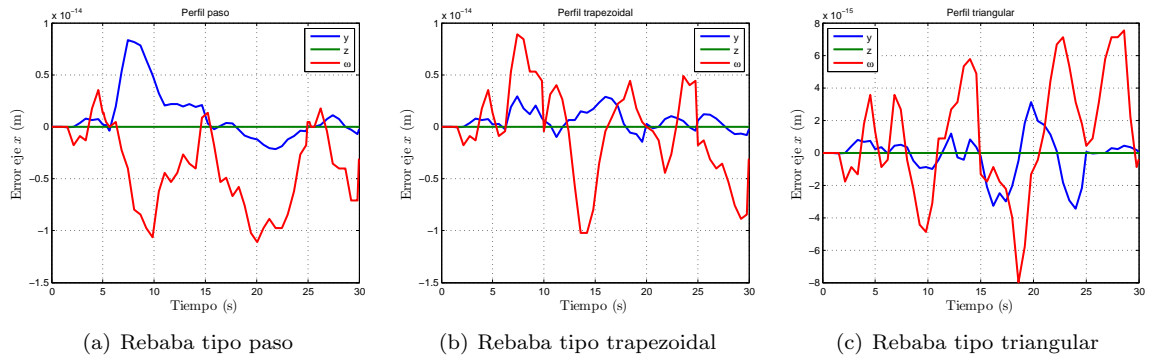


Figura 6.14: Perfil del error de posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular con control híbrido.

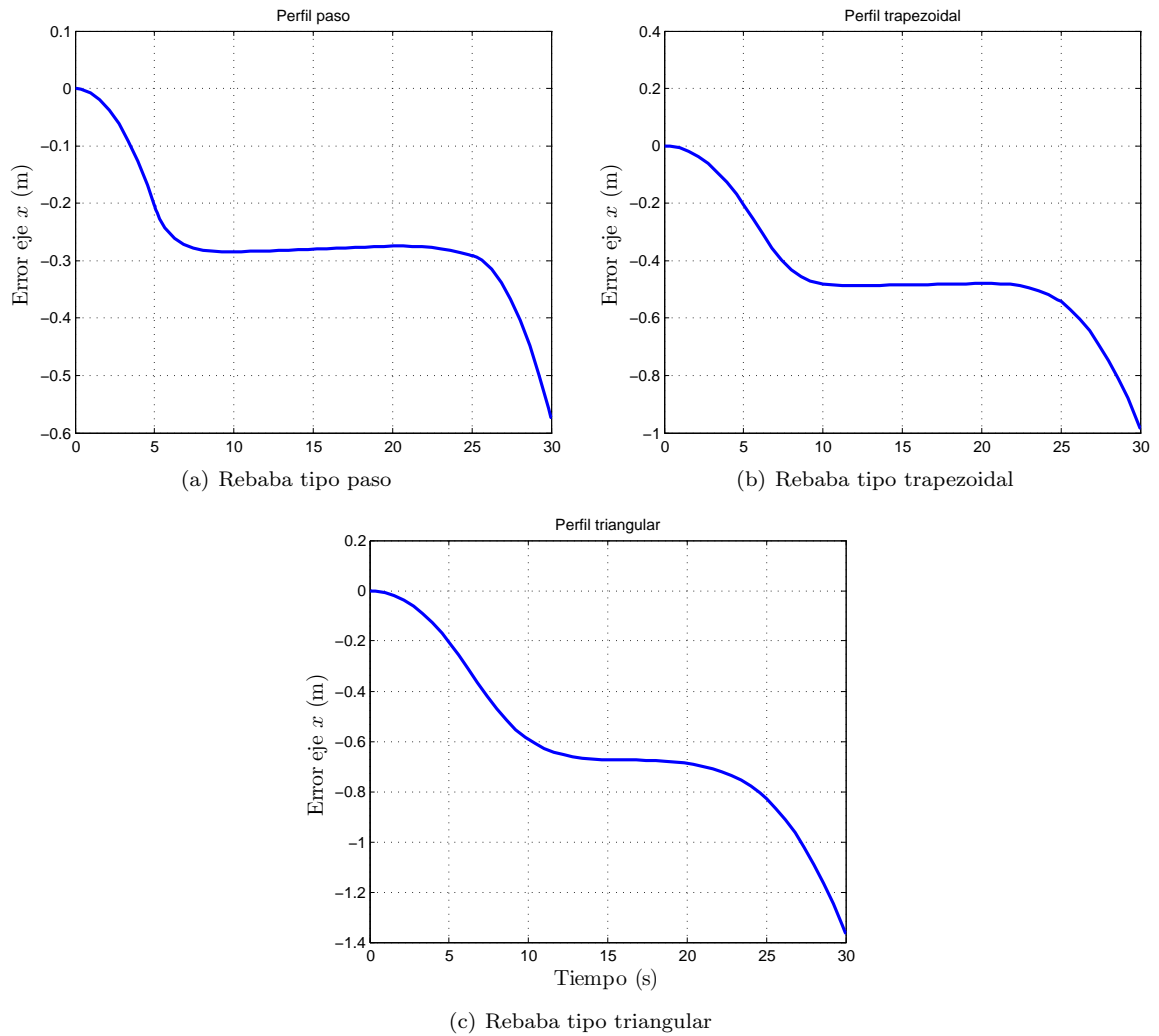


Figura 6.15: Perfil del error de posición en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b) trapezoidal y (c) triangular con control híbrido en el eje x .

Respecto a la señal de control para los ejes x, y y ω , con un perfil tipo paso el eje x y y toman comportamientos similares donde la máxima señal de control para el eje x es de 13 N y la del eje y es de 13 N , después de alcanzar estos valores picos a los 5 segundos la señal de control decae de manera exponencial y el eje x llega hasta un valor de -2.4 N y el eje y a 0.3 N . El eje z como no cambia de posición ni realiza fuerza la señal de control es la necesaria para compensar la acción de la gravedad siendo este valor de -17.63 N . Este comportamiento es evidenciado en la figura 6.16(a).

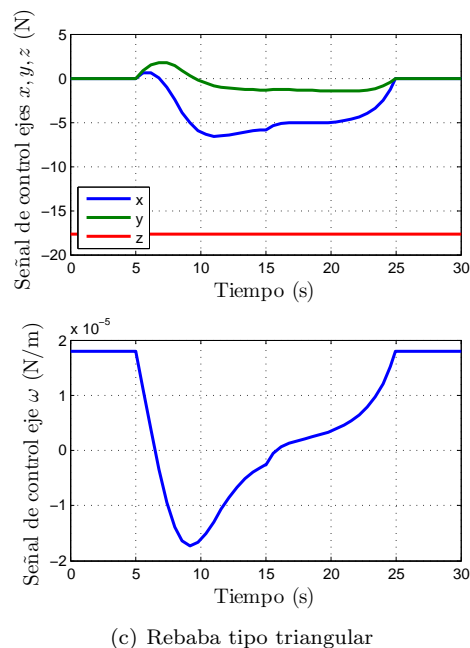
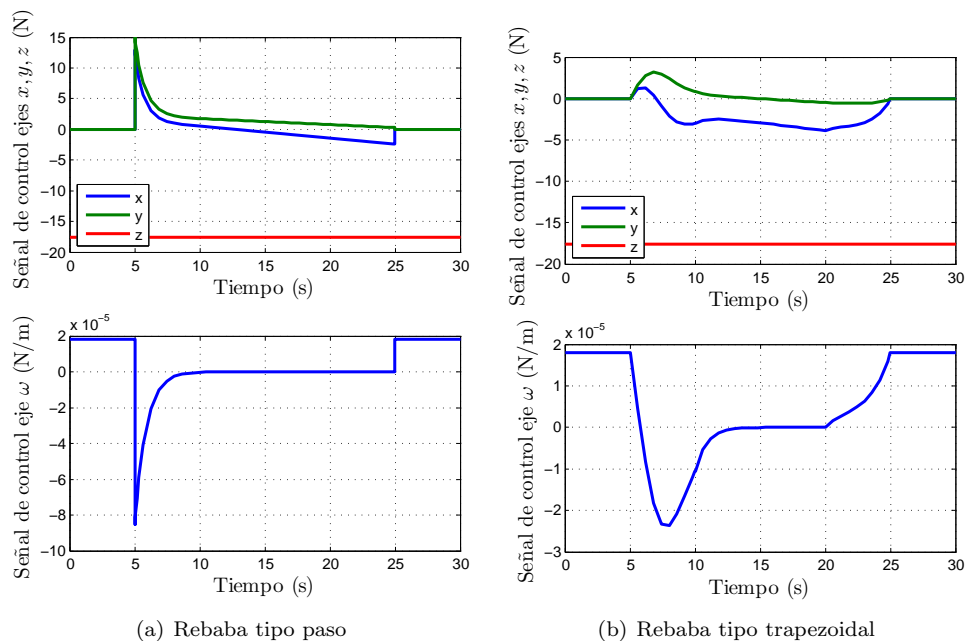


Figura 6.16: Perfil de la señal de control en el espacio de trabajo para rebaba de tipo (a) paso, (b)trapezoidal y (c)triangular con control híbrido en el eje x .

La señal generada por un controlador de tipo híbrido y una rebaba trapezoidal se evidencia en la

figura 6.16(b) donde se nota que la señal en el eje x toma un valor máximo de -3.86 N , el eje y toma un valor máximo de 3.2 N , el eje z se mantiene constante en un valor de -17.63 N y el eje ω mantiene su señal de control en aproximadamente 0.

La señal de control generado debida a un perfil de rebaba triangular es similar a la generada por la rebaba de forma trapezoidal donde el eje x toma un valor máximo de -6.5 N , el eje y con un valor de 1.8 N y el valor de z se mantiene en el mismo valor de los anteriores perfiles como se observa en la figura 6.16(c).

6.5 Análisis comparativo entre el control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición)

Con el fin de realizar un análisis comparativo entre las técnicas de control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición) se utilizan 6 índices de desempeño. El primero es el tiempo de máquina requerido para realizar la simulación. Para obtener estos tiempos se realiza un análisis estadístico en el cual los datos de entrada son los tiempos tomados cuando se ejecuta 10 veces la simulación de los controladores.

Las simulaciones son realizadas en el ambiente de Simulink Versión 7.7 con una configuración de los parámetros observa en la figura 6.17, allí se nota que el método de resolución numérica utilizado es el ODE45. Este método está basado en el algoritmo Runge-Kutta para solución de sistemas con poca rigidez. Un tiempo de simulación de 30 segundos y un paso variable para la discretización de la solución.

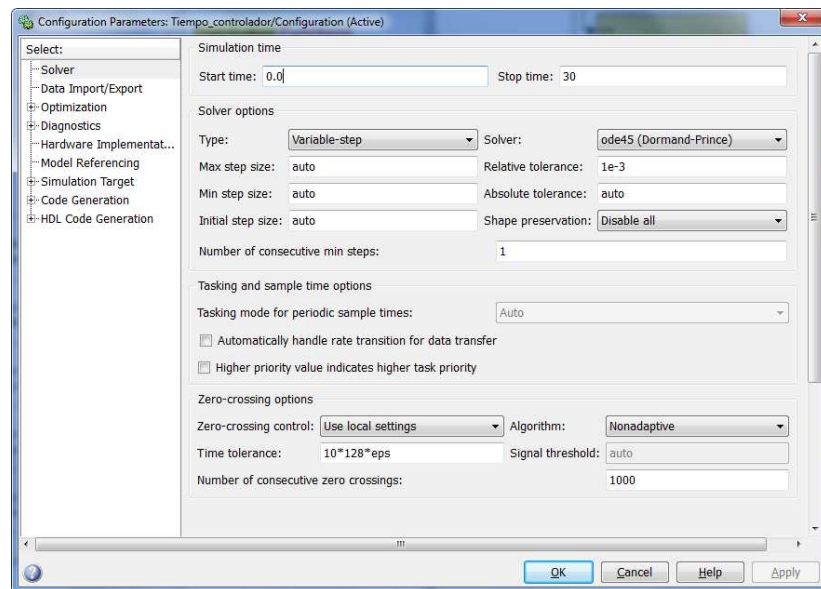


Figura 6.17: Configuración de parámetros en Simulink

Las características del computador donde se realiza las simulaciones son:

- 4.00 GB de RAM (3.85 GB Utilizable)
- Procesador Intel(R) Core(TM) i5-2300 CPU @ 2.80 GHz
- Sistema operativo Windows 7 Enterprise 64 bits

Con el fin de encontrar el tiempo de máquina que le toma al sistema de control ser simulado, se obtiene el promedio y la varianza del tiempo de máquina cuando se simula diez veces solo el modelo del

robot. Los valores obtenidos son de 12,1728 Seg y 0,00039 respectivamente. Este valor posteriormente es restado al tiempo total del sistema completo. El valor obtenido es el tiempo de cómputo que le toma a la máquina realizar la simulación del sistema de control.

En la tabla 6.1 se muestran los valores medios y la varianza de los tiempos medidos para los controladores de impedancia e híbrido (fuerza-posición) con rebaba de tipo paso, trapezoidal y triangular, allí se observa que el control de impedancia para los tres tipos de rebaba tarda más de 6 veces el tiempo de máquina del control híbrido (fuerza-posición). También se detalla que la rebaba de tipo paso es la que toma más tiempo de máquina para ambos controladores.

Tabla 6.1: Tiempos medios y varianza de simulación con control de impedancia e híbrido

Controlador \ Rebaba	Paso	Trapezoidal	Triangular
Control de impedancia	150,1100 $S \pm 0,7259$	141,0809 $S \pm 0,1102$	132,2893 $S \pm 0,1102$
Control Híbrido (Fuerza-Posición)	22,5887 $S \pm 0,0369$	16,1787 $S \pm 0,0068$	15,0338 $S \pm 0,0042$

Al analizar la diferencia entre los tiempos de máquina se concluye que el controlador de impedancia requiere una mayor cantidad de recursos computacionales, esto debido a que este controlador posee el parámetro M el cual debe ser invertido dentro de la ley de control y además la señal de la fuerza, los errores de posición y velocidad son multiplicados por la inversa de este parámetro.

El segundo índice de desempeño es el esfuerzo de la señal de control (ITAU) el cual se define como:

$$ITAU = \int_0^t t|u(t)|dt \quad (6.28)$$

En donde u es la señal de control en el tiempo. En la tabla 6.2 se observan los valores de los esfuerzos de las señales del controlador de impedancia, allí se nota que la rebaba de tipo paso requiere de un esfuerzo mayor en comparación con los otros tipos de rebaba, además el mayor esfuerzo se encuentra en el actuador del eje z , siendo este de 7933,59 e igual para los tres tipos de rebaba. Este esfuerzo es el requerido para compensar la acción de la gravedad sobre los eslabones 3 y 4. El esfuerzo mínimo se encuentra en el eje ω siendo este valor el más pequeño respecto a los demás y de igual forma es el mismo valor para los 3 tipos de rebaba.

Tabla 6.2: Esfuerzo de control para controlador tipo impedancia

Eje \ Rebaba	Paso	Trapezoidal	Triangular
x	730,2589	617,5298	424,0379
y	774,2719	639,9278	435,0782
z	7933,59	7933,59	7933,59
ω	0,0007	0,0005	0,0005
Total	9438,1215	9191,0481	8792,7066

En la tabla 6.3 se encuentran los esfuerzos de la señal de control para un controlador de tipo híbrido (fuerza-posición), allí se observa que para el perfil de rebaba triangular requiere de un mayor esfuerzo para realizar la tarea de corte. Situación contraria al control de impedancia donde este tipo de rebaba es la que menor esfuerzo requirió. Al observar los datos por ejes se observa que el eje z nuevamente es el de mayor esfuerzo y que toma el mismo valor para los tres tipos de rebaba con un valor de 7933,59.

Al realizar un promedio de los valores totales de los esfuerzos para los tres tipos de rebaba se obtiene que el control de impedancia es mayor en 233, cabe notar que este valor solo representa aproximadamente 2,5 %

Tabla 6.3: Esfuerzo de control para controlador tipo híbrido

Eje \ Rebaba	Paso	Trapezoidal	Triangular
x	396,978	848,9343	1345,7727
y	376,4864	175,2463	360,9509
z	7933,59	7933,59	7933,59
ω	0,0031	0,0041	0,0041
Total	8707,0575	8957,7747	9640,3177

Al analizar el valor del esfuerzo de control en el controlador híbrido con una rebaba de tipo triangular y siendo este el máximo valor entre los tres tipos de rebaba. Se puede apreciar que este valor obedece al seguimiento de la fuerza deseada que debe realizar el control cuando la dinámica del medio está cambiando durante toda la trayectoria.

Continuando con la señal de control es posible utilizar como índice de desempeño el máximo valor de esta. Este valor proporciona cual será la máxima señal de excitación sobre el actuador. Como se describió el eje z posee el máximo esfuerzo y la máxima señal de control, pero para efectos de esta tesis se tomarán solo los valores debidos por los demás ejes ya que los valores del eje z no cambian de valor en este segmento de la simulación. En este caso, se observa en la tabla 6.4 los valores máximos de la señal de control para los ejes x , y y ω para ambos controladores, además el control híbrido toma valores picos mayores que el control de impedancia.

Tabla 6.4: Máxima señal de control por ejes para el control de impedancia e híbrido

Control impedancia	Eje	Paso	Trapezoidal	Triangular
	x	4,0493	3,8698	3,0765
	y	3,4859	3,4006	3,0326
	ω	0,0001	0	0
Control híbrido	Eje	Paso	Trapezoidal	Triangular
	x	12,8949	3,8611	6,5715
	y	14,8849	3,1901	1,7954
	ω	0	0	0

El tercer índice de desempeño utilizado es la suavidad de aplicación de la fuerza, para medir este se toma la señal de fuerza medida y se encuentra el índice de suavidad, el cual se calcula obteniendo la segunda derivada de señal de la fuerza, el resultado es binarizado de tal forma que los valores positivos toman el valor de 1, los valores negativos el de -1 y los valores de 0 son eliminados. Como resultado se obtiene un vector con los valores de -1 y 1 el cual es denominado como h . Con este vector es posible realizar el siguiente cálculo,

$$W = \sum_{k=1}^{p-z-3} h_k + h_{k+1} \quad (6.29)$$

Donde la señal presenta mayor suavidad entre menos ceros contenga el vector W ; es decir, la suavidad de la señal es inversamente proporcional al número de ceros del vector W . En la tabla 6.5 se muestran los valores de la suavidad de la señal de fuerza para el control híbrido (fuerza-posición) y control de impedancia con los 3 tipos de rebaba. Analizando los datos se observa que el control híbrido genera una fuerza de corte con mayor suavidad que el control de impedancia en los 3 tipos de rebaba. Esto debido a que la ley de control híbrido está dicada a mantener la fuerza de contacto de manera estable durante el tiempo y estos valores representan el comportamiento transitorio de la fuerza medida

Tabla 6.5: Suavidad de la señal de fuerza en el eje x

	Paso	Trapezoidal	Triangular
Control de impedancia	112	99	100
Control híbrido	20	15	12

Según lo evidenciado en la tabla 6.5 el control híbrido genera una fuerza de corte con mayor suavidad, esto debido a que esta ley de control posee un control directo sobre esta variable y además este alcanza un estado estable con un error de posición de 0. Por el contrario con el control de impedancia la fuerza está regida por el comportamiento del perfil de la velocidad deseada y además este no alcanza un valor estable.

El cuarto índice de desempeño es el valor medio cuadrático (RMS) de la primera derivada de la señal de fuerza. Como la fuerza está presente exclusivamente en el eje x solo en este eje se analizará este índice. La primera derivada representa el cambio en velocidad de la fuerza. Entre mayor sea el valor de RMS mayor es la relación de cambio de la fuerza. En la tabla 6.6 se observan los valores para ambos controladores con los 3 tipos de rebaba, allí se nota que la señal de la fuerza que cambia más rápidamente en el tiempo es con el controlador híbrido con un valor de 1691,1989 N/s , este valor refleja el gran pico de fuerza que se genera cuando el robot entra y sale de contacto con la rebaba de tipo paso.

Tabla 6.6: Valores RMS de la primera deriva de la señal de fuerza para eje x

Control impedancia	Eje	Paso	Trapezoidal	Triangular
	x	143,9101	2,1568	1,5097
Control híbrido	Eje	Paso	Trapezoidal	Triangular
	x	1691,1989	6,2249	3,9778

El quinto índice de desempeño es el ITAE (Integral del tiempo ponderado por el error absoluto) ecuación 6.30, el cual representa el comportamiento medido del error ponderado en el tiempo. En la tabla 6.7 se encuentran los valores ITAE, allí se observa que los valores de los ejes y , z y ω son pequeños o nulos respecto a los valores del eje x , esto es debido a la interacción del robot con el ambiente en este eje. En el control híbrido este valor es mayor debido a la arquitectura de la ley de control, ya que en este eje la variable de control es la fuerza y no la posición. Al momento de analizar la posición en el eje x para el control híbrido se observa que esta variable crece de manera exponencial cuando el robot no está en contacto con el ambiente, este comportamiento es normal ya que el robot tratará de alcanzar la fuerza deseada y la forma de lograrlo es aumentar la velocidad en este eje. Por el contrario, en el control de impedancia no se realiza un control directo de la fuerza de corte, aquí se involucra el comportamiento mecánico y del movimiento en la generación de una fuerza de corte.

$$ITAE = \int t|e(t)|dt \quad (6.30)$$

Al analizar el proceso de corte de la rebaba en la silla plástica con el control de impedancia es de notar que la fuerza de corte no se mantiene constante y que el valor de la fuerza depende del perfil de la velocidad y la rebaba. Este permite controlar la fuerza de manera indirectamente con la velocidad de avance del efector final, también permite parametrizar el comportamiento por cada uno de los ejes del robot según sea la aplicación. Este tipo de control no sería apropiado si fuera necesario alcanzar una fuerza deseada. Para el corte de la rebaba de la silla se calculó el valor de velocidad del efector final necesario para generar una fuerza de corte de aproximadamente 18 N . Al revisar la trayectoria completa de la silla el control de impedancia tiene la capacidad de realizar toda la trayectoria con el desempeño descrito en la tesis.

Tabla 6.7: Valores ITAE para control híbrido y control de impedancia

ITAE Control de impedancia	Eje	Paso	Trapezoidal	Triangular
	x	1,7655	1,4326	0,9678
	y	$0,34 * 10^{-14}$	$0,12 * 10^{-13}$	$0,50 * 10^{-15}$
	z	0	0	0
	ω	$0,04 * 10^{-14}$	0	0
Control Híbrido (Fuerza-Posición)				
	x	139,3097	244,7462	347,2516
	y	$0,04 * 10^{-11}$	$0,03 * 10^{-11}$	$0,31 * 10^{-11}$
	z	0	0	0
	ω	$0,13 * 10^{-11}$	$0,11 * 10^{-11}$	$0,10 * 10^{-11}$

Respecto al análisis del control híbrido para el corte de rebaba en una silla plástica se tiene que la fuerza de corte es posible especificarla como un valor deseado y este valor ser alcanzado, el gran inconveniente de este tipo de control es la disgregación entre los ejes ya que cuando se realiza un trayectoria curva se involucran los ejes x y y pero no es posible realizar un control de fuerza y de posición al mismo tiempo sobre el eje x . Por tal motivo esta arquitectura de control no es posible utilizarla cuando la rebaba involucra un eje de posición, además para realizar la trayectoria de la silla completa se hace necesario dividir la trayectorias en subtareas y reajustar el controlador por cada una de las subtareas.

Tabla 6.8: Índices de desempeño para el control de impedancia y el control híbrido

	Paso	Trapezoidal	Triangular
Control de impedancia			
Tiempo de máquina	150,11	141,0209	132,2893
ITAU	9438,1215	9191,0481	8792,7066
Máxima U	4,044	3,8696	3,0765
Suavidad de F	112	99	100
RMS de $\delta F/dt$	143,9101	2,1568	1,5097
ITAE	1,7655	1,4326	0,9678
Control Híbrido (Fuerza-Posición)			
Tiempo de máquina	22,5887	16,1787	15,0338
ITAU	8707,0575	8957,7747	9640,3177
Máxima U	14,8849	3,8611	6,5715
Suavidad de F	20	15	12
RMS de $\delta F/dt$	1691,1989	6,2249	3,9778
ITAE	139,3097	244,7462	347,2516

En la tabla 6.8 se encuentran los 6 índices del desempeño del control de impedancia e híbrido, allí se observa que los índices en los que el control de impedancia es mejor son los valores ITAE, la razón de cambio de la fuerza medida y la máxima señal de control. Por otra parte los índices de mejor puntuación para el control híbrido son el esfuerzo de control (ITAE), la suavidad de la fuerza y el tiempo de máquina.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

7.1 Conclusiones

En este documento, se desarrolló un análisis comparativo entre las técnicas de control de impedancia y el control híbrido (fuerza-posición) en sistemas robóticos de corte de material sobrante (rebaba). Este trabajo se limitó a un ambiente de simulación que emula características reales de un robot industrial. Varios criterios de selección fueron evaluados para encontrar un robot apto para la tarea deseada y del cual características como peso, centros de gravedad, inercias, relación de actuadores y geometría fueran conocidas. La cinemática del robot seleccionado y su modelo dinámico fueron establecidos. Se diseñaron los controladores de forma que el robot cumpliera con la tarea asignada de corte de rebaba en una silla plástica los cuales fueron comparadas utilizando distintas figuras de mérito.

Para el problema tratado en esta tesis se selecciona el robot HM-40704G con arquitectura SCARA, esta arquitectura tiene ventajas sobre los robots articulados, debido a que al realizar movimientos sobre el plano (x, y) éste no es afectado por la gravedad lo que conlleva a tener menores señales de control en los actuadores asociados a estos ejes. Además, este tipo de arquitectura es ampliamente utilizada en actividades donde la orientación del efector final no sea un factor predominante en la ejecución de la tarea.

Al analizar la dinámica del robot en aspectos como la geometría de los eslabones, la localización del centro de masa, el peso y la dirección del movimiento; se encuentra que entre mayor sea el volumen y la densidad de los eslabones, mayor es el peso de los mismos. De igual forma, se pudo establecer que al aumentar la distancia entre el centro de masa y el eje de la articulación, crece la fuerza que debe generar el actuador para generar el movimiento. Dicha distancia hace que la dinámica cambie de manera considerable.

Se encontró que la dinámica de los actuadores no afecta de manera significativa la dinámica del robot, ya que las inercias asociadas a la parte eléctrica, son pequeñas respecto a las inercias mecánicas del robot. Por el contrario, el peso del actuador y la relación de la caja reductora si tienen efecto sobre la dinámica del robot, siendo la relación de la caja reductora el factor más influyente debido a que afecta directamente el valor de la fuerza requerida para generar movimiento en el robot. Además, dado que la localización del actuador cambia la posición del centro de masas del eslabón y su peso, este elemento debe ser considerado dentro del diseño del robot.

Para efectos de modelado de la cinemática directa del sistema robótico los parámetros Denavit-Hanternberg pueden ser utilizados. Este método no solo simplifica el análisis geométrico, sino que, además, reduce la complejidad de los cálculos que se tienen que realizar para encontrar dicha cinemática. Adicionalmente, se puede concluir que este método es adecuado para todo tipo de robot que posea una arquitectura de cadena cinemática abierta.

El enfoque geométrico permite encontrar la cinemática inversa del robot SCARA analizando de forma separada el problema de posición y el de orientación. Como éste, diferentes enfoques han buscado simplificar la tarea de encontrar la cinemática inversa del robot al desacoplar posición y orientación.

La parametrización de cada una de las técnicas de control está ligada al conocimiento de la dinámica del ambiente. En la literatura se encuentra como realizar la parametrización a ambientes de tipo complacientes. Para el caso aplicado en esta tesis se plantea un modelo de ambiente viscoso para el cual se propone una ley de control que no ha sido reportada de manera explícita en la literatura, de igual manera esta ley de control está parametrizada con las características del este tipo de ambiente.

El cambio de una variable b_p del medio se asemeja a la variación del espesor de la rebaba, al cambiar la dinámica del ambiente se demuestra que el comportamiento de la ley de control no es el más apropiado pero este se mantiene dentro del margen permisible. Cabe notar que se emplearon 3 escenarios de rebaba siendo una de tipo paso, trapezoidal y triangular.

La forma de los comportamientos transitorios puede ser modificada al variar el valor del amortiguamiento en la dinámica. De otro lado, un valor alto de inercia es equivalente a aumentar el peso de cada eslabón en el robot, lo que representa un mayor impulso en el movimiento del mismo y por ende, un impacto más fuerte con el ambiente. Esta característica es apropiada cuando se necesita que el robot tenga mayor robustez.

Cuando se tiene una interacción entre el robot y el ambiente es conveniente tener valores de inercia grandes y valores de rigidez pequeños. Ésta configuración permite generar pequeñas fuerzas de contacto. Por el contrario, cuando se tiene un valor grande de rigidez y uno pequeño de inercia, la configuración resulta adecuada para un movimiento libre sin fuerzas de reacción, ya que realiza un buen seguimiento de la trayectoria.

El control de impedancia es una técnica de control capaz de cambiar la dinámica aparente del robot cuando existe una interacción entre el robot y el ambiente. Propiedades como la rigidez, el amortiguamiento y la inercia, son modificadas de tal forma que el comportamiento deseado sea alcanzado. Cuando se caracteriza un eje con gran rigidez, se pretende garantizar un error de posición pequeño; sin embargo, cuando existe una interacción con el ambiente, aparece una fuerza proporcional a la rigidez del mismo, que inevitablemente aumenta el error de posición. Al utilizar esta técnica se vuelve innecesario realimentar la fuerza dado que está relacionada con la posición del efector final (Control indirecto de fuerza). Por el contrario, en el control híbrido, sí es necesario conocer esta medida ya que el control de fuerza se alimenta de este valor (control directo de fuerza). Para realizar una óptima parametrización de ambos controles es necesario conocer el modelo del ambiente donde el robot interactuará.

El control híbrido se rige por la geometría de descripción del ambiente, basado en restricciones de movimiento y fuerza. Es muy importante realizar una correcta selección para cada tarea de dichas restricciones, tanto naturales como artificiales; ya que éstas permitirán enviar la correcta señal de control al respectivo eje. La selección de restricciones permite caracterizar al control híbrido como excluyente, ya que donde se realiza control de fuerza no es posible hacer control de posición.

Analizando las fuerzas de contacto en los controladores se puede concluir que la fuerza de contacto producida por el control híbrido es creada por los intentos de violación de las restricciones generadas por el ambiente. En cambio, la fuerza de contacto inducida por el control de impedancia es el resultado del balance entre las dinámicas acopladas del ambiente y del robot.

Para la tarea de corte de rebaba en sillas plásticas se concluye que la técnica de control híbrido planteada no es la más apta. Esto debido a que dicha técnica, no permite controlar la fuerza en trayectorias curvas donde la posición también debe ser controlada. Además, dado que el área de corte de la rebaba puede ser variable, es posible que la utilización de una referencia constante para la fuerza no sea lo más apropiado. Por el contrario, en el control de impedancia, la fuerza generada está cambiando con la dinámica del ambiente, comportamiento similar al realizado por un operador humano experto.

7.2 Contribuciones

Esta tesis fue inspirada y financiada por el proyecto industrial realizado en conjunto con la Universidad de los Andes, Bioplast y Colciencias. Este proyecto lleva por nombre “Estandarización de la línea de producción de sillas utilizadas en el transporte masivo de pasajeros” y contó 4 áreas definidas entre las cuales se encontraba la de automatización. Allí se enmarca el problema de la automatización del

corte de la rebaba en la silla plástica. Éste problema es abordado desde la perspectiva de la robótica y como problema puntual se hace la imperiosa necesidad de un estudio de ingeniería para conocer la parametrización y el alcance de las técnicas de control de fuerza en robots.

El principal resultado de este trabajo fue conocer las principales características tanto del control híbrido (fuerza - posición) como el control de impedancia al ser aplicados al corte de rebaba de una silla plástica. Como influencia la dinámica del ambiente en el comportamiento del robot y en la parametrización de los controladores. Se planteó el modelo de la cinemática directa, cinemática inversa y el modelo dinámico del robot SCARA HM-40704G de marca DENSO utilizando el entorno Simulink de MATLAB®. Finalmente se realizó el control de corte de rebaba para sillas plásticas con un control híbrido y un control de impedancia los cuales se parametrizaron de acuerdo al modelo viscoso planteado, allí se encontraron índices de desempeños con los cuales se realizó la comparación entre las técnicas de control.

En el desarrollo de la tesis se generaron algunas aplicaciones computacionales las cuales quedan disponibles en la Universidad Nacional de Colombia a través del grupo de investigación GAUNAL para continuar los posibles trabajos derivados de la tesis. Se destacan los siguientes desarrollos computacionales orientados a sistemas de control de fuerza en robots:

- Aplicación en MATLAB® para el cálculo de la cinemática inversa y directa de un robot tipo SCARA.
- Modelo en Simulink de la dinámica del robot SCARA.
- Modelo en Simulink del control de impedancia e híbrido.

También se redactaron dos artículos técnicos orientados a revistas indexadas nacionales, uno para selección del robot en ámbito industrial y el otro orientado al estudio comparativo de las técnicas de control de fuerza.

7.3 Trabajo Futuro

Para continuar con el trabajo desarrollado en esta tesis, investigadores pueden enfocarse en:

- Corroborar el funcionamiento de los controladores diseñados sobre los robots industriales.
- Generar algoritmos de control adaptativos y robustos que se ajusten a los cambios en la dinámica del ambiente.
- Implementar los algoritmos de control sobre sistemas embebidos, y explorar la posibilidad de auto-sintonización.
- Generar sistemas de control con capacidad de controlar robots de más de 4 grados de libertad.
- Explorar la posibilidad de mejorar el control híbrido de modo que pueda ser utilizado en trayectorias curvas.

Bibliografía

- [1] ABB. Especificaciones del producto irb 1400, 2012.
- [2] ABB. Catalogo de robots, 2012-2013.
- [3] Adept. Portfolio of industrial intelligent robotics, 2012.
- [4] Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñin, Carlos Balaguer, and Rafael Aracil. *FUNDAMENTOS DE ROBÓTICA*. Mc Graw Hill, 2007.
- [5] John J. Craig. *Introduction to Robotics, mechanics and control*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [6] Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). Encuesta de desarrollo e innovación tecnológica - edits, Enero 2013.
- [7] J. Denavit and R. S Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, Junio 1955.
- [8] Fanuc. Gama de robots, 2012.
- [9] Clément M. Gosselin. The optimum design of robotic manipulators using dexterity indices. *Robotics and Autonomous Systems*, 9(4):213 – 226, 1992.
- [10] Charles Robert Hadlock. *Mathematical modeling in the environment*. MAA, 1998.
- [11] Neville Hogan. Impedance control: An approach to manipulation. In *Conferences American Control Conference*, 1994.
- [12] <http://es.made-in-china.com>. Web consultada en 2013-03-01.
- [13] <http://www.automated-motion.com/>. Web consultada en 2013-03-01.
- [14] <http://www.ifr.org/>. Web consultada en 2013-03-01.
- [15] <http://www.virtual.unal.edu.co/>. Web consultada en 2013-03-01.
- [16] KUKA. Catalogo of ideas 2011/12, 2011-2012.
- [17] Mitsubishi. Robots industriales sinopsis global de las opciones, 2011.
- [18] Motoman. Motoman-mh6 manual de servicio, 2011.
- [19] J.K. Parker, A.R. Khoogar, and D.E. Goldberg. Inverse kinematics of redundant robots using genetic algorithms. *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on Robotics*, 1:271–276, 1989.
- [20] M. H. Raibert and J. J. Craig. Hybrid position/force control of manipulator. *ASME Journal of Dynamic System*, Vol.102:126–133, June 1981.
- [21] Daniel Andrés Ramirez. *Diseño de una plataforma robótica paralela de 6 DOF para asistente quirúrgico en cirugías de reconstrucción cráneo-facial*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2010.

- [22] Lorenzo Sciavicco. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer, 2009.
- [23] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York, 2006.
- [24] Staübli. Industrial robots, 2011.
- [25] Jindong Tan, Ning Xi, and Yuechao Wang. A singularity-free motion control algorithm for robot manipulators-a hybrid system approach. *Automatica*, 40(7):1239 – 1245, 2004.
- [26] Lung-Wen Tsai. *Robot Analysis*. Wiley-interscience, 1999.